第一章　随机事件的概率

图文并茂详细学习笔记

依据课程 PPT 课件整理

2026 年 11 月 16 日

摘　要

本章是全书的基础：随机试验、样本空间、事件的关系与运算（集合语言）；概率的四种定义（古典、几何、统计、公理化）及性质；条件概率与乘法公式；全概率公式与贝叶斯公式；事件的独立性。考试中古典概型与几何概型的计算、加法公式与逆事件公式、全概率与贝叶斯公式、独立性判断与计算是高频考点，多以小题和综合大题第一问形式出现。

目录

本章知识框架 **2**

1　随机事件与样本空间 **2**

1.1　随机试验与随机事件 2

1.2　样本空间 2

1.3　事件的关系与运算【重点】 2

1.4　事件的运算律 3

2　概率的定义及性质 **4**

2.1　古典概型【高频考点】 4

2.2　几何概型【高频考点】 5

2.3　概率的统计定义（频率） 5

2.4　概率的公理化定义与性质【重点】 6

3　条件概率与乘法公式 **7**

3.1　条件概率【高频考点】 7

3.2　乘法公式 8

4　全概率公式与贝叶斯公式【高频考点】 **8**

4.1　完备事件组与全概率公式 8

4.2　贝叶斯公式 9

5　事件的独立性【高频考点】 **9**

5.1　两个事件的独立性 9

5.2　多个事件的独立性 10

5.3　独立性的性质与综合计算 10

6　本章总结 **11**

6.1　必背公式汇总 11

6.2　重要求解方法与套路 12

6.3　重要题型归纳 13

6.4　易错点清单 13

本章知识框架

随机试验 → 样本空间与随机事件 → 事件的关系与运算（集合论、德摩根公式）
→ 概率的定义：古典概型（排列组合计数）→ 几何概型（度量之比）→ 统计定义（频率稳定）→ 公理化定义（三条公理 + 加法公式等性质）
→ 条件概率 → 乘法公式 → 全概率公式与贝叶斯公式（完备事件组）
→ 事件的独立性（两两独立与相互独立）→ 综合计算题

1 随机事件与样本空间

1.1 随机试验与随机事件

自然界和社会生活中的现象分为两类：**确定性现象**（一定条件下结果可事先预言）与**随机现象**（结果事先不可预言，但具有统计规律性）。本课程研究随机现象的数量规律。

随机试验（用 E 或 E_1, E_2 表示）指满足三条的试验：

1. 在相同条件下可以重复进行；
2. 每次试验出现的结果不可预知；
3. 可知所有可能结果的范围。

随机事件（简称事件，用 A, B, C 或 $A_1, A_2, \cdots$ 表示）：试验中可能发生也可能不发生的结果。

- **基本事件**：试验中每一个可能的结果，是最简单的随机事件，常用 e 或 e_1, e_2 表示；随机事件由若干基本事件组成，事件发生当且仅当它所包含的某个基本事件发生。
- **必然事件**：必然发生的事件，记为 S 或 Ω；**不可能事件**：不可能发生的事件，记为 $\emptyset$。二者不是随机事件，但当作特殊的随机事件处理。

1.2 样本空间

试验的全部基本事件组成的集合称为**样本空间**，记为 S 或 Ω。用集合论语言：

- 基本事件是样本空间的元素（样本点）；
- 随机事件是样本空间的子集；
- 不可能事件对应空集 $\emptyset$，必然事件对应全集 S。

注意

同一随机试验，若试验目的不同，对应的样本空间也不同。例如掷一颗骰子，观察点数时 $S = \{e_1, e_2, \cdots, e_6\}$；只观察奇偶性时样本空间可取 $S = \{$ 奇, 偶 $\}$。

1.3 事件的关系与运算【重点】

事件的关系与运算完全对应集合的关系与运算：

关系/运算	记号	概率论含义
包含	$A \subset B$	A 发生必导致 B 发生
相等	$A = B$	$A \subset B$ 且 $B \subset A$
并（和）	$A \cup B$ 或 $A + B$	A, B 至少有一个发生
交（积）	$A \cap B$ 或 AB	A, B 同时发生
差	$A - B$	A 发生而 B 不发生
互不相容（互斥）	$AB = \varnothing$	A, B 不能同时发生
互逆（对立）	$AB = \varnothing$ 且 $A + B = S$	B 为 A 的逆事件，记 $B = \bar{A}$

n 个事件的和事件记为 $\sum_{i=1}^{n} A_i$（至少一个发生），积事件记为 $\prod_{i=1}^{n} A_i$（同时发生）；可列个事件类似，上下限换为 1 到 ∞。

易错提示

- **互逆一定互斥，互斥不一定互逆**：互逆还要求 $A + B = S$，即” 非此即彼”。
- ” 都不发生” 与” 不都发生” 完全不同，前者是 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$，后者是 $\overline{ABC}$。

1.4 事件的运算律

- 交换律、结合律、分配律与集合运算相同；
- 幂等律：$A + A = A$，$AA = A$；
- 差化积：$A - B = A\bar{B}$；
- 吸收律：$A + S = S$，$A + \varnothing = A$，$A + AB = A$；$AS = A$，$A\varnothing = \varnothing$，$A(A + B) = A$；
- **反演律（德摩根公式）【高频考点】**：

$$\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}, \qquad \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$$

$$\overline{\sum_i A_i} = \prod_i \bar{A}_i, \qquad \overline{\prod_i A_i} = \sum_i \bar{A}_i$$

记忆口诀：” 长杠变短杠，符号换方向”。运算顺序：逆、交、并、差，括号优先。

例 1 重复投掷一枚匀称的硬币三次，记录投掷结果。设 A_i =” 第 i 次投掷出现正面”$(i = 1, 2, 3)$，试用 A_1, A_2, A_3 表示下列事件：(1) 只第一次出现正面 B_1；(2) 只出现一次正面 B_2；(3) 至少出现一次正面 B_3；(4) 出现正面不多于一次 B_4。

解第 1 步：把每个事件按” 哪次正、哪次反” 逐次翻译为积事件或积事件之和。

(1) 只第一次正面，即第一次正、后两次反：

$$B_1 = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$$

(2) 只出现一次正面，有三种位置，互不相容求和：

$$B_2 = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$$

(3) 至少出现一次正面，用和事件或用逆事件（" 全反" 的反面）：

$$B_3 = A_1 + A_2 + A_3 = \overline{\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3}$$

(4) 正面不多于一次 = 全反 + 恰一次正：

$$B_4 = \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$$

第 2 步（技巧）：遇到" 至少"" 至多" 类表述，先写出其逆事件往往更简洁，再利用" 事件是逆事件的逆" 还原。

2 概率的定义及性质

2.1 古典概型【高频考点】

若试验满足：(1) 样本空间只含有限个（n 个）基本事件；(2) 每个基本事件发生的可能性相等，则称其为**古典概型**。此时事件 A 含 k 个基本事件，定义

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

即"A 包含的基本事件个数" 比上" 基本事件总数"。

常用计数工具（务必熟练）：

- 乘法原理：分步完成，共 $m_1m_2\cdots m_n$ 种方法；
- 加法原理：分类完成，共 $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种方法；
- 排列数：$A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$，全排列 $A_n^n = n!$；
- 组合数：$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$；
- 重复排列（有放回取 m 个排成一列）：n^m 种；
- 环排列（n 个元素取 m 个排成圆圈）：$\frac{A_n^m}{m}$ 种。

古典概率的性质：$0 \le P(A) \le 1$；$P(S) = 1$；有限可加性（互不相容事件和的概率等于概率之和）。

例 2 袋中有 m 个黑球和 n 个白球，从中连续取球，每次取 1 个，取后不放回，求第 i 次（$1 \le i \le m+n$）取得黑球的概率。

解设 $A =$" 第 i 次取得黑球"。

第 1 步（全排列法）：把 $m+n$ 个球全部取出排成一列，基本事件总数为 $A_{m+n}^{m+n} = (m+n)!$。第 i 个位置放黑球有 A_m^1 种，其余 $m+n-1$ 个位置任意排，故

$$P(A) = \frac{A_m^1 A_{m+n-1}^{m+n-1}}{A_{m+n}^{m+n}} = \frac{m\cdot(m+n-1)!}{(m+n)!} = \frac{m}{m+n}$$

第 2 步（缩减样本空间法）：只取到第 i 次为止，基本事件总数为 A_{m+n}^{i}，第 i 次为黑球、前 $i-1$ 次任意，

$$P(A)=\frac{A_m^1 A_{m+n-1}^{i-1}}{A_{m+n}^i}=\frac{m}{m+n}$$

结论：摸到黑球的概率与摸球先后次序无关——这就是”抽签机会均等”的理论依据，考试中可直接使用。

2.2 几何概型【高频考点】

设 S 是”可度量”的有界区域（线段、平面有界区域、空间有界区域），向 S 内投掷一质点。若质点落在 S 内任意子区域 A 内的可能性大小与 A 的度量 $L(A)$ 成正比、与 A 的位置和形状无关，则称此试验为**几何概型**，定义

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}$$

其中度量 L：一维用长度，二维用面积，三维用体积。

几何概率的性质：$0\le P(A)\le 1$；$P(S)=1$；有限可加性与**可列可加性**均成立。

例 3（约会问题）两人约定于晚上 8 时至 9 时在某地会面，先到者等候 20 分钟，过时就离去。求两人能见面的概率。

解第 1 步：设两人到达时刻分别为 8 时 x 分、8 时 y 分，则样本空间为正方形区域

$$S=\{(x,y)\mid 0\le x\le 60,\ 0\le y\le 60\}$$

第 2 步：设 $A=$”两人能见面”，则能见面当且仅当两人到达时刻之差不超过 20 分钟，

$$A=\{(x,y)\in S\mid |x-y|\le 20\}$$

即正方形中夹在直线 $y=x+20$ 与 $y=x-20$ 之间的带状区域。

第 3 步：算面积之比。两个角上的三角形直角边均为 $60-20=40$，

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}=\frac{60^2-2\times\left(\frac{1}{2}\times 40^2\right)}{60^2}=\frac{3600-1600}{3600}=\frac{5}{9}$$

考场提醒

几何概型两步走：**设变量写样本区域 → 把事件翻译成不等式 → 求度量之比**。另两例结论记住：在长 1 米线段上随机投点，与两端距离相差不超过 0.2 米（即落点 x 满足 $|2x-1|\le 0.2$）的概率为 0.2；半径 R 圆内定一直径，过直径上任一点作垂弦，弦长小于 $\sqrt{2}R$ 的概率为 $1-\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.2929$。

2.3 概率的统计定义（频率）

设试验重复做了 n 次，事件 A 发生 n_A 次，称比值

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

为 n 次试验中 A 发生的**频率**。频率的性质：$0 \le f_n(A) \le 1$；$f_n(S)=1$；互不相容事件和的频率等于频率之和。

频率随 n 变化，但当 n 增大时，频率总在某常数 p 附近摆动并逐渐稳定于 p，则定义**统计概率** $P(A)=p$（理论依据是第五章的贝努里大数定理）。实用近似求法：

$$P(A) \approx f_n(A)$$

2.4 概率的公理化定义与性质【重点】

设 $P(A)$ 是定义在试验 E 的全体事件（包含 $\emptyset$ 和 S）所组成的事件域 $\mathcal{F}$ 上的实值函数，若满足：

1. **非负性**：对每一 $A \in \mathcal{F}$，$0 \le P(A) \le 1$；
2. **规范性**：$P(S)=1$；
3. **可列可加性**：对互不相容的 $A_i \in \mathcal{F}$ $(i=1,2,\cdots)$，

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。由三条公理可推出以下性质（全部是计算工具）：

1. $P(\emptyset)=0$；
2. **有限可加性**：$A_1,\cdots,A_n$ 互不相容，则 $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$；
3. **逆事件公式**：$P(\bar{A})=1-P(A)$；
4. **减法公式与单调性**：若 $B \subset A$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$，且 $P(B) \le P(A)$；
5. **加法公式**：

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A_1+A_2+A_3)=\sum_{i=1}^{3} P(A_i)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

易错提示

- 减法公式 $P(A-B)=P(A)-P(B)$ ** 只对 $B \subset A$ 成立 **；一般情形用 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$（因为 $A-B=A-AB$，而 $AB \subset A$）。
- 加法公式不要漏减 $P(AB)$；只有互不相容时才有 $P(A+B)=P(A)+P(B)$。

例 4 (1) 已知 $P(A)=0.5, P(A-B)=0.2$，求 $P(\overline{AB})$；(2) 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{9}$，求事件 A,B,C 全不发生的概率。

解 (1) 由 $P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$，得 $P(AB)=0.5-0.2=0.3$，故

$$P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 0.7$$

(2) 全不发生即 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$，用德摩根公式化为逆事件：

$$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\overline{A+B+C}) = 1 - P(A+B+C)$$

由 $ABC \subset AB$ 及 $P(AB) = 0$ 得 $P(ABC) = 0$，代入三事件加法公式：

$$P(A+B+C) = \frac{1}{4} \times 3 - 0 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + 0 = \frac{19}{36}$$

$$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = 1 - \frac{19}{36} = \frac{17}{36}$$

例 5 将 r 个有区别的球随机放入 n 个不同的盒子（每盒容纳球数不限，$r \le n$），求：(1) $A =$" 某一指定的盒子不多于 2 个球" 的概率；(2) $B =$" 至少有一个盒子多于 1 个球" 的概率。

解由乘法原理，r 个不同球放入 n 个不同盒子共 n^r 种放法，即基本事件总数为 n^r。

(1) 设 $A_i =$" 指定盒子恰有 i 个球"（$i = 0, 1, 2$），三者互不相容。指定盒恰有 i 个球：先从 r 球选 i 球放入该盒（C_r^i 种），其余 $r-i$ 球任意放入其余 $n-1$ 盒（$(n-1)^{r-i}$ 种），故

$$P(A) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) = \frac{(n-1)^r + C_r^1(n-1)^{r-1} + C_r^2(n-1)^{r-2}}{n^r}$$

(2) 直接计算困难，取逆事件 $\bar{B} =$" 每个盒子最多 1 个球"：相当于从 n 盒中选 r 盒各放 1 球并排列，共 A_n^r 种，故

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{A_n^r}{n^r}$$

考场提醒

" 至少有一个……" 类问题，**首选逆事件**，这是古典概型最常用的套路。同类型结论：抄下的最大车牌号恰为 k（$1 \le k \le N$）的概率为 $\frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}$（用" 号码都不超过 k 的概率 $\frac{k^n}{N^n}$" 减去" 都不超过 $k-1$ 的概率"）。

3 条件概率与乘法公式

3.1 条件概率【高频考点】

设 A, B 为试验 E 的两个事件，且 $P(B) > 0$，称

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的**条件概率**。直观理解：" 样本空间缩减" 为 B。一般 $P(A \mid B) \neq P(A)$；若 A, B 独立，则 $P(A \mid B) = P(A)$。

条件概率的性质（与概率公理平行）：

1. $0 \le P(A \mid B) \le 1$，$P(S \mid B) = 1$；
2. 若 $A_1, A_2, \cdots$ 互不相容，则 $P\left(\sum_i A_i \mid B\right) = \sum_i P(A_i \mid B)$；
3. $P(\bar{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B)$。

例 6 已知 $P(A) = 0.6$，$P(B) = 0.8$，$P(\bar{A} \mid B) = 0.35$，求 $P(\bar{B} - A)$ 与 $P(A \mid \bar{B})$。

解第 1 步：先由条件概率求 $P(AB)$。

$$P(\bar{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B) = 1 - \frac{P(AB)}{P(B)} = 0.35$$

代入 $P(B) = 0.8$ 解得 $P(AB) = 0.8 \times (1 - 0.35) = 0.52$。

第 2 步：求 $P(\bar{B} - A)$。注意 $\bar{B} - A = \bar{B}\bar{A} = \overline{A + B}$，用德摩根与加法公式：

$$P(\bar{B} - A) = 1 - P(A + B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)] = 1 - (0.6 + 0.8 - 0.52) = 0.12$$

第 3 步：求 $P(A \mid \bar{B})$，用定义与减法公式：

$$P(A \mid \bar{B}) = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)} = \frac{0.6 - 0.52}{0.2} = 0.4$$

3.2 乘法公式

由条件概率定义直接得**乘法公式**：

$$P(AB) = P(B)P(A \mid B) \quad (P(B) > 0)$$

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) \quad (P(A) > 0)$$

推广到 n 个事件：当 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$ 时，

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 \cdots A_{n-1})$$

用于求”一连串事件依次发生”的概率（如不放回抽样依次抽到指定结果）。

4 全概率公式与贝叶斯公式【高频考点】

4.1 完备事件组与全概率公式

若事件组 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 互不相容且 $\sum_{i=1}^{n} B_i = S$，则称其为样本空间 S 的一个**划分**（完备事件组）。

定理（全概率公式）设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的划分且 $P(B_i) > 0$，则对任意事件 A，

$$P(A) = P\left(\sum_{i=1}^{n} AB_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$$

思想是”化整为零”：当 A 的概率复杂难算时，找出导致 A 发生的全部”原因” B_i，分块计算再加权求和。

4.2 贝叶斯公式

同一划分下，若 $P(A)>0$，则

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A \mid B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n$$

贝叶斯公式用于”执果索因”：事件 A 已发生，反求是哪个原因 B_i 导致的。其中 $P(B_i)$ 称**先验概率**，$P(B_i \mid A)$ 称**后验概率**。两公式中的 n 均可换为可列无穷。

例 7（以花探邻）小王出差，家里的花交邻居照顾。邻居记得浇水则花存活概率为 0.8，忘记浇水则存活概率为 0.3；邻居记得与忘记浇水的概率均为 0.5。(1) 求小王回来时花还活着的概率；(2) 若花还活着，求邻居真的浇了水的概率。

解设 $C=$”邻居记得浇水”，$A=$”花活着”。

第 1 步：C 与 $\bar{C}$ 构成完备事件组，用全概率公式：

$$P(A)=P(C)P(A \mid C)+P(\bar{C})P(A \mid \bar{C})=0.5\times 0.8+0.5\times 0.3=0.55$$

第 2 步：用贝叶斯公式求后验概率：

$$P(C \mid A)=\frac{P(C)P(A \mid C)}{P(A)}=\frac{0.5\times 0.8}{0.55}=\frac{8}{11}\approx 72.73\%$$

即信任度由先验的 50% 提高到后验的 72.73%。

例 8 三门火炮同时炮击一敌舰，每炮发射一弹。击中敌舰一、二、三发炮弹的概率分别为 0.3、0.5、0.1；敌舰中一、二、三发炮弹被击沉的概率分别为 0.2、0.6、1。求敌舰被击沉的概率。

解第 1 步：设 $B_i=$”有 i 发炮弹击中敌舰”（$i=1,2,3$），$A=$”敌舰被击沉”。B_1,B_2,B_3 互不相容且覆盖所有能击沉的情形。

第 2 步：用全概率公式：

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A \mid B_i)=0.3\times 0.2+0.5\times 0.6+0.1\times 1=0.46$$

5 事件的独立性【高频考点】

5.1 两个事件的独立性

一般 $P(A \mid B)\neq P(A)$，即 B 的发生影响 A 的概率；若 B 的发生不影响 A，即 $P(A \mid B)=P(A)$，等价于 $P(AB)=P(A)P(B)$。

定义对任意两个事件 A,B，若

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称 A 与 B **相互独立**（简称独立）。

定理 1 设 $P(B)>0$，则 A 与 B 独立的充要条件是 $P(A\mid B)=P(A)$。

定理 2 设 $P(B)>0$，$P(\bar{B})>0$，则 A 与 B 独立的充要条件是 $P(A\mid B)=P(A\mid \bar{B})$（或 $P(B\mid A)=P(B\mid \bar{A})$）。

特殊性质：**概率为 0 或 1 的事件与任意事件独立**。注意：概率为 0 的事件不一定是不可能事件，概率为 1 的事件不一定是必然事件（如在 $[0,1]$ 上随机取点，" 取到点 0.5" 概率为 0 但可能发生）。

5.2 多个事件的独立性

- n 个事件 $A_1,\cdots,A_n$ **两两独立**：任意 $i\neq j$ 都有 $P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$；
- n 个事件**相互独立**：对任意 $2\le k\le n$ 及任意 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$，

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

关系：** 相互独立 $\Rightarrow$ 两两独立，反之不然 **。

例 9 一个正四面体，一面漆红色，一面漆黄色，一面漆蓝色，还有一面漆红黄蓝三色。任取一面，令 $A=$" 这面含红色"，$B=$" 这面含黄色"，$C=$" 这面含蓝色"。问 A,B,C 是否两两独立？是否相互独立？

解第 1 步：四个面等可能，含每种颜色的面各有 2 个，故

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$$

第 2 步：任两种颜色同时含有的面只有" 三色面" 一个，故

$$P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{4}=P(A)P(B)$$

所以 A,B,C **两两独立**。

第 3 步：$P(ABC)=\frac{1}{4}$（仍只有三色面），而 $P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{8}$，两者不等，故**不相互独立**。

5.3 独立性的性质与综合计算

定理 3 若 A 与 B 独立，则 A 与 $\bar{B}$、$\bar{A}$ 与 B、$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也都独立。

定理 4 若 $A_1,\cdots,A_n$ 相互独立，把其中任意个 A_i 换成 $\bar{A}_i$ 后所得事件组仍相互独立。

易错提示

- **独立与互斥是两回事**：独立刻画" 概率上互不影响"（$P(AB)=P(A)P(B)$），互斥刻画" 不能同时发生"（$AB=\emptyset$）。当 $P(A)>0$ 且 $P(B)>0$ 时，互斥一定不独立，独立一定不互斥。
- 相互独立条件下求和事件概率，常用 $P(A+B+\cdots)=1-P(\bar{A}\bar{B}\cdots)=1-P(\bar{A})P(\bar{B})\cdots$。

例 10 已知事件 A,B,C,D 相互独立，$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}P(C)=\frac{1}{2}P(D)$，且 $P(A+B+C+D)=\frac{481}{625}$，求 $P(A)$。

解第 1 步：对和事件取逆，利用独立性与德摩根公式：

$$P(\overline{A+B+C+D})=P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D})=P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})P(\bar{D})=[1-P(A)]^2[1-2P(A)]^2$$

第 2 步：由已知，$P(\overline{A+B+C+D})=1-\frac{481}{625}=\frac{144}{625}$，故

$$[1-P(A)][1-2P(A)]=\frac{12}{25}$$

第 3 步：展开 $2P(A)^2-3P(A)+\frac{13}{25}=0$，解得 $P(A)=\frac{1}{5}$ 或 $\frac{13}{10}$（舍去，概率不超过 1），故 $P(A)=\frac{1}{5}$。

例 11 甲、乙、丙三人向同一飞机射击，击中概率分别为 0.4、0.5、0.7。若只一人击中，飞机被击落的概率为 0.2；若二人击中，为 0.6；若三人击中，飞机一定被击落。求飞机被击落的概率。

解第 1 步：设 A_1,A_2,A_3 分别表示甲、乙、丙击中飞机（相互独立），$C=$" 飞机被击落"，$B_i=$" 飞机被 i 人击中"（$i=1,2,3$）。

第 2 步：用事件的运算表示 B_i 并由可加性与独立性计算：

$$B_1=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$$

$$P(B_1)=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7=0.36$$

$$B_2=A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3$$

$$P(B_2)=0.4\times0.5\times0.3+0.4\times0.5\times0.7+0.6\times0.5\times0.7=0.41$$

$$P(B_3)=P(A_1A_2A_3)=0.4\times0.5\times0.7=0.14$$

第 3 步：B_1,B_2,B_3 构成划分（击落后必属其一），且 $P(C\mid B_1)=0.2$，$P(C\mid B_2)=0.6$，$P(C\mid B_3)=1$，由全概率公式：

$$P(C)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(C\mid B_i)=0.36\times0.2+0.41\times0.6+0.14\times1=0.458$$

6 本章总结

6.1 必背公式汇总

1. 德摩根公式：$\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$；$\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$；$\overline{\sum_i A_i}=\prod_i \bar{A}_i$，$\overline{\prod_i A_i}=\sum_i \bar{A}_i$

2. 差化积：$A-B=A\bar{B}=A-AB$
3. 古典概率：$P(A)=\frac{k}{n}$（A 含基本事件数 / 基本事件总数）
4. 几何概率：$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}$（长度、面积、体积之比）
5. 逆事件公式：$P(\bar{A})=1-P(A)$
6. 减法公式：$B\subset A$ 时 $P(A-B)=P(A)-P(B)$；一般 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$
7. 加法公式：$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；三事件 $P(A_1+A_2+A_3)=\sum P(A_i)-\sum P(A_iA_j)+P(A_1A_2A_3)$
8. 条件概率：$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$（$P(B)>0$）
9. 乘法公式：$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=P(B)P(A\mid B)$；$P(A_1\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_n\mid A_1\cdots A_{n-1})$
10. 全概率公式：$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$（$B_i$ 为完备事件组）
11. 贝叶斯公式：$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}$
12. 独立性定义：$P(AB)=P(A)P(B)$；独立时 $P(A+B)=1-P(\bar{A})P(\bar{B})$

6.2 重要求解方法与套路

套路一：事件的表示

第 1 步：设出基本事件 A_i；第 2 步：把”都发生”译为积、”至少一个”译为和、”都不发生”译为 $\prod\bar{A}_i$、”不都发生”译为 $\overline{\prod A_i}$；第 3 步：复杂表述先写逆事件，再用德摩根公式还原。

套路二：古典概型计算

第 1 步：确认等可能、有限；第 2 步：选定计数模型（排列 A_n^k 有序、组合 C_n^k 无序、重复排列 n^m 有放回）；第 3 步：分子分母**用同一种计数口径**；第 4 步：含”至少”优先取逆事件。

套路三：几何概型计算

第 1 步：设变量，写出样本区域 S；第 2 步：把事件条件翻译成关于变量的不等式，画出对应子区域；第 3 步：求度量之比 $P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}$。

套路四：概率性质求抽象概率

第 1 步：把所求事件用 $A,B,AB,A+B,A-B$ 及逆事件表示（德摩根公式是核心工具）；第 2 步：套用加法、减法、逆事件公式；第 3 步：由已知量解出 $P(AB)$ 再回代。

套路五：全概率与贝叶斯

第 1 步：找”原因”，设完备事件组 $B_1,\cdots,B_n$（互不相容、和为 S、概率均正）；第 2 步：求 $P(A)$ 用全概率公式加权求和；第 3 步：已知 A 发生反求原因概率用贝叶斯公式，分母就是第 2 步算出的 $P(A)$。

套路六：独立性计算

第 1 步：验证独立用定义 $P(AB)=P(A)P(B)$（多个事件还要验证所有子集乘积式）；第 2 步：积事件概率直接拆成概率之积；第 3 步：和事件概率先取逆化为逆事件之积 $1-\prod P(\bar{A}_i)$。

6.3 重要题型归纳

题型	识别特征	解题套路/所用公式
事件的符号表示	”用 A_1, A_2, A_3 表示事件……”	积 = 都发生，和 = 至少一个；利用德摩根公式与逆事件互化
古典概型（摸球、分房、抽签）	有限等可能，问”恰好””至少”	$P(A) = k/n$；”至少”取逆：$1 - A_n^r/n^r$；抽签结论：与次序无关
几何概型	区间投点、约会、会面、随机取数	设变量 → 列不等式 → 度量之比 $L(A)/L(S)$
抽象概率计算	已知 $P(A), P(B), P(AB)$ 等求新概率	加法公式、减法公式、逆事件公式、德摩根公式
条件概率计算	”已知……发生，求……的概率”	定义式 $P(A \mid B) = P(AB)/P(B)$，或缩减样本空间直接数
全概率问题	结果由多种”原因”导致，求结果概率	设完备事件组 B_i，$P(A) = \sum P(B_i)P(A \mid B_i)$
贝叶斯问题	结果已发生，反查原因概率	$P(B_i \mid A) = P(B_i)P(A \mid B_i)/P(A)$，分母用全概率公式
独立性判断	问是否两两/相互独立	逐对验证 $P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)$；相互独立还需 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ 等
独立性综合计算	多人射击、多个元件，求和/积事件概率	积事件拆乘积；和事件用 $1 - \prod P(\bar{A}_i)$；配全概率公式

6.4 易错点清单

- ”都不发生”是 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$，”不都发生”是 $\overline{ABC}$，二者不可混淆。
- 互斥（$AB = \emptyset$）不要求和为 S；互逆要求 $AB = \emptyset$ 且 $A + B = S$，互逆必互斥，反之不然。
- 减法公式 $P(A - B) = P(A) - P(B)$ 仅当 $B \subset A$ 时成立，一般要写 $P(A) - P(AB)$。
- 加法公式必须减去 $P(AB)$；把 $P(A + B)$ 直接写成 $P(A) + P(B)$ 只在互斥时对。
- 条件概率定义要求 $P(B) > 0$；$P(A \mid B)$ 与 $P(B \mid A)$ 一般不相等。
- 全概率公式的 B_i 必须是完备事件组（互不相容且穷尽），漏掉情形或情形重叠都会算错。
- 贝叶斯公式的分母是 $P(A)$ 的全概率展开，不要只写某一项。
- 两两独立推不出相互独立（四面体涂色例是标准反例）。
- 概率为 0 未必是不可能事件，概率为 1 未必是必然事件；但二者都与任意事件独立。
- 正概率事件之间：互斥必不独立，独立必不互斥。
- 古典概型中分子分母计数口径必须一致（都有序或都无序），否则结果错误。
- 几何概型注意选对度量：一维长度、二维面积、三维体积，且样本区域要写完整。