第三章　二维随机变量

图文并茂详细学习笔记

依据课程 PPT 课件整理

2026 年 11 月 16 日

摘　要

本章研究二维随机变量 (X,Y)：联合分布函数、二维离散型的联合分布律、二维连续型的联合概率密度，以及由联合分布派生的边缘分布、条件分布与随机变量的独立性，并介绍二维均匀分布与二维正态分布。本章是期末考试计算大题的必考章节：由密度定常数、分段求联合分布函数、求边缘/条件密度、判别独立性、计算区域概率是最高频的五类题型。

目录

本章知识框架 **2**

1　二维随机变量与联合分布函数 **2**

1.1　二维随机变量的定义 2

1.2　联合分布函数及其性质【高频考点】 2

2　二维离散型随机变量 **3**

2.1　联合分布律【高频考点】 3

3　二维连续型随机变量 **4**

3.1　联合概率密度【高频考点】 4

3.2　两种常用的二维连续型分布【重点】 6

4　边缘分布 **6**

4.1　边缘分布函数 6

4.2　边缘分布律【高频考点】 7

4.3　边缘概率密度【高频考点】 7

5　条件分布 **8**

5.1　条件分布律 8

5.2　条件概率密度【高频考点】 8

6　随机变量的独立性 **10**

6.1　独立性的定义与离散型判别【高频考点】 10

6.2　连续型独立性判别与综合应用【高频考点】 11

6.3　有限多个随机变量的独立性【了解】 11

7　本章总结 **12**

7.1　必背公式汇总 12

7.2　重要求解方法与套路 12

7.3　重要题型归纳 13

7.4　易错点清单 13

本章知识框架

二维随机变量 (X,Y)
- 联合分布函数 F(x,y)：四条基本性质 → 定常数、求矩形区域概率
- 二维离散型：联合分布律 p_ij → 行和列和得边缘分布律 → 比值得条件分布律
- 二维连续型：联合密度 f(x,y) → 积分得边缘密度 → 比值得条件密度
- 独立性判别：F = F_X · F_Y ⇔ p_ij = p_i · p_ · j ⇔ f = f_X · f_Y
- 常用二维分布：均匀分布 U(D)；二维正态 N(μ1,σ1^2;μ2,σ2^2;ρ)

1　二维随机变量与联合分布函数

1.1　二维随机变量的定义

设试验 E 的样本空间为 $S=\{e\}$，$X=X(e)$，$Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的两个随机变量，则由它们组成的向量 (X,Y) 称为**二维随机变量**（或二维随机向量）。注意：(X,Y) 的性质不仅与 X、Y 各自有关，还依赖于两者的相互关系，因此必须把 (X,Y) 当作一个整体来研究。

1.2　联合分布函数及其性质【高频考点】

定义：设 (X,Y) 为二维随机变量，对任意实数 x,y，二元函数

$$F(x,y)=P\{X\le x,\ Y\le y\}$$

称为 (X,Y) 的**分布函数**，或 X 与 Y 的**联合分布函数**。其几何意义是随机点 (X,Y) 落在点 (x,y) 左下方无穷矩形区域内的概率。

$F(x,y)$ 的四条基本性质（充要判别依据）：

1. **有界性**：$0\le F(x,y)\le 1$，且 $F(-\infty,y)=0$，$F(x,-\infty)=0$，$F(-\infty,-\infty)=0$，$F(+\infty,+\infty)=1$；
2. **单调性**：$F(x,y)$ 对 x 或对 y 都是单调不减的；
3. **右连续性**：$F(x,y)$ 关于 x 和关于 y 均为右连续；
4. **非负性（矩形公式）**：对任意 $x_1<x_2$，$y_1<y_2$，有

$$P\{x_1<X\le x_2,\ y_1<Y\le y_2\}=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\ge 0$$

反之，凡满足性质 (1)~(4) 的二元函数 $F(x,y)$ 必定是某个二维随机变量的分布函数。

考场提醒

- 性质 (1) 中取 $-\infty$、$+\infty$ 的极限，是确定 $F(x,y)$ 中未知常数的标准工具；
- 矩形公式容易记错符号：右上加、左上减、右下减、左下加（”对角同号”）。

例 1　设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)=a\,(b+\arctan x)\left(c+\arctan\frac{y}{2}\right)$。(1) 确定常数 a,b,c；(2) 求 $P\{X>0,Y>0\}$。

解：(1) 利用分布函数性质：

$$0=F(x,-\infty)=a\,(b+\arctan x)\left(c-\frac{\pi}{2}\right)\ \Rightarrow\ c=\frac{\pi}{2}$$

$$0=F(-\infty,y)=a\left(b-\frac{\pi}{2}\right)\left(c+\arctan\frac{y}{2}\right)\ \Rightarrow\ b=\frac{\pi}{2}$$

$$1=F(+\infty,+\infty)=a\left(b+\frac{\pi}{2}\right)\left(c+\frac{\pi}{2}\right)=a\pi^2\ \Rightarrow\ a=\frac{1}{\pi^2}$$

(2) 用矩形公式：

$$P\{X>0,Y>0\}=F(+\infty,+\infty)+F(0,0)-F(0,+\infty)-F(+\infty,0)$$

$$=1+\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\pi-\frac{1}{\pi^2}\cdot\pi\cdot\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

2 二维离散型随机变量

2.1 联合分布律【高频考点】

定义：若二维随机变量 (X,Y) 的全部可能取值为有限对或可列对 (x_i,y_j)，$i,j=1,2,\cdots$，则称 (X,Y) 为**二维离散型随机变量**。记

$$P\{X=x_i,\ Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$$

称为 (X,Y) 的**（概率）分布律**，或 X 与 Y 的**联合分布律**。表示法有公式法与列表法两种。

基本性质：

1. $p_{ij}\geq 0$；
2. $\sum_i\sum_j p_{ij}=1$（归一性，定常数用）。

区域概率公式：随机点 (X,Y) 落在平面任一区域 D 内的概率为

$$P\{(X,Y)\in D\}=\sum_{(x_i,y_j)\in D}p_{ij}$$

即把 D 内所有取值点对应的概率相加。特别有 $F(x,y)=\sum_{x_i\leq x}\sum_{y_j\leq y}p_{ij}$。

例 2　甲、乙两盒内均有 3 只晶体管，其中甲盒内有 1 只正品、2 只次品；乙盒内有 2 只正品、1 只次品。第一次从甲盒内随机取出 2 只管子放入乙盒；第二次从乙盒内随机取出 2 只管子。以 X,Y 分别表示第一、二次取出的正品管子数目，求 (X,Y) 的分布律。

解：X 的可能取值为 $0,1$；Y 的可能取值为 $0,1,2$。用乘法公式 $P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}\cdot P\{Y=j\,|\,X=i\}$ 逐格计算：

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{\mathrm{C}_2^2}{\mathrm{C}_3^2}\cdot\frac{\mathrm{C}_3^2}{\mathrm{C}_5^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{30}$$

$$P\{X=0,Y=1\}=\frac{\mathrm{C}_2^2}{\mathrm{C}_3^2}\cdot\frac{\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_3^1}{\mathrm{C}_5^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10}=\frac{6}{30},\qquad P\{X=0,Y=2\}=\frac{1}{30}$$

同理算得 $X=1$ 一行的三个概率，列表如下（单位均为 $\frac{1}{30}$）：

X \{} Y	0	1	2
0	$\frac{3}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{1}{30}$
1	$\frac{2}{30}$	$\frac{12}{30}$	$\frac{6}{30}$

验算：$\frac{3+6+1+2+12+6}{30}=1$，满足归一性。

例 3　接连不断地掷一颗匀称的骰子，直到出现点数大于 2 为止。以 X 表示掷骰子的次数，Y 表示最后一次掷出的点数，求 (X,Y) 的分布律。

解：X 的取值为 $i=1,2,\cdots$；Y 的取值为 $j=3,4,5,6$。事件 $\{X=i,Y=j\}$ 表示”前 $i-1$ 次掷出 1 点或 2 点，第 i 次掷出 j 点”，故

$$P\{X=i,Y=j\}=\left(\frac{2}{6}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1},\quad i=1,2,\cdots;\ j=3,4,5,6$$

易错提示

求联合分布律的核心是把 $\{X=x_i,Y=y_j\}$ 翻译成事件的交，再用乘法公式或古典概型算每个格子的概率；最后务必用 $\sum\sum p_{ij}=1$ 验算。

3　二维连续型随机变量

3.1　联合概率密度【高频考点】

定义：设 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$，若存在非负可积函数 $f(x,y)$，使对任意实数 x,y 恒有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

则称 (X,Y) 为**二维连续型随机变量**，$f(x,y)$ 称为 (X,Y) 的**概率密度**，或 X 与 Y 的**联合概率密度**。

基本性质：

1. $f(x,y)\geq 0$；
2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=F(+\infty,+\infty)=1$（定常数用）。

反之，满足这两条性质的二元函数一定是某个二维随机变量的概率密度。

两个常用关系：

- 若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续，则 $\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$（已知 F 求 f 用混合偏导）；

- 设 D 为平面上任一区域，则

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例 4　设 (X,Y) 的概率密度为：当 $0\le x\le 2$，$y>0$ 时 $f(x,y)=ae^{-2y}$，其余处为 0。(1) 确定常数 a；(2) 求分布函数 $F(x,y)$；(3) 求 $P\{Y\le X\}$。

解：(1) 由归一性：

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}ae^{-2y}\,\mathrm{d}y=2a\left(-\frac{1}{2}e^{-2y}\right)|_0^{+\infty}=2a\cdot\frac{1}{2}=a$$

得 $a=1$，即非零部分 $f(x,y)=e^{-2y}$（$0\le x\le 2$，$y>0$）。

(2) 分区域讨论 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$：

- 当 $x<0$ 或 $y\le 0$ 时，积分区域内 $f(u,v)=0$，故 $F(x,y)=0$；
- 当 $0\le x\le 2$，$y>0$ 时，$F(x,y)=\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^y e^{-2v}\,\mathrm{d}v=\frac{x}{2}\left(1-e^{-2y}\right)$；
- 当 $x>2$，$y>0$ 时，$F(x,y)=\int_0^2\mathrm{d}u\int_0^y e^{-2v}\,\mathrm{d}v=1-e^{-2y}$。

汇总：

区域	$F(x,y)$
$x<0$ 或 $y\le 0$	0
$0\le x\le 2$，$y>0$	$\frac{x}{2}\left(1-e^{-2y}\right)$
$x>2$，$y>0$	$1-e^{-2y}$

(3) 设 $D=\{(x,y)\,|\,y\le x\}$，取 D 与密度非零区域的交 $D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2,\ 0\le y\le x\}$：

$$P\{Y\le X\}=\iint_{D_1}e^{-2y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^x e^{-2y}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)|_0^2=\frac{1}{4}\left(3+e^{-4}\right)$$

例 5　设 (X,Y) 的概率密度为：当 $0<x<1$，$0<y<x$ 时 $f(x,y)=8xy$，其余处为 0。(1) 求分布函数 $F(x,y)$；(2) 求 $P\{X+Y\le 1\}$。

解：(1) 非零区域是由 $y=0$、$y=x$、$x=1$ 围成的三角形。按点 (x,y) 的位置分五种情形：

- 当 $x<0$ 或 $y\le 0$ 时，$F(x,y)=0$；
- 当 $0<x<1$，$0<y<x$ 时，$F(x,y)=\int_0^y\mathrm{d}v\int_v^x 8uv\,\mathrm{d}u=2x^2y^2-y^4$；
- 当 $0<x<1$，$y\ge x$ 时，$F(x,y)=\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^u 8uv\,\mathrm{d}v=x^4$；
- 当 $x\ge 1$，$0<y<1$ 时，$F(x,y)=\int_0^y\mathrm{d}v\int_v^1 8uv\,\mathrm{d}u=2y^2-y^4$；
- 当 $x\ge 1$，$y\ge 1$ 时，$F(x,y)=1$。

(2) $D=\{(x,y)\,|\,x+y\le 1\}$ 与非零三角形的交为 D_1（y 从 0 到 $\frac{1}{2}$，x 从 y 到 $1-y$）：

$$P\{X+Y\le 1\}=\iint_{D_1}8xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{1-y}8xy\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$$

考场提醒

由 $f(x,y)$ 求 $F(x,y)$ 是本章最易丢分的题型。**先在坐标系中画出密度的非零区域**，再以该区域的顶点、边界线为界，把全平面分成若干块，对点 (x,y) 落在每一块的情形分别计算二重积分，最后分段写出 F；交界处 F 的取值必须连续，可用来检验。

3.2 两种常用的二维连续型分布【重点】

(1) 二维均匀分布：设 D 为平面上面积为 A 的有界区域，若

$$f(x,y)=\frac{1}{A},\quad (x,y)\in D$$

其余处为 0，则称 (X,Y) 在区域 D 上服从**均匀分布**，记为 $(X,Y)\sim U(D)$。要点：(X,Y) 落在 D 的子区域 G 内的概率等于 G 的面积除以 D 的面积（几何概型）。

(2) 二维正态分布：若 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 均为常数，且 $\sigma_1>0$，$\sigma_2>0$，$|\rho|<1$，则称 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的**二维正态分布**，记作

$$(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2;\ \mu_2,\sigma_2^2;\ \rho\right)$$

五个参数的意义将在第五章说明。

4 边缘分布

课件中称”边沿分布”，与”边缘分布”同义。核心思想：**联合分布可以唯一确定边缘分布，但两个边缘分布一般不能确定联合分布**（因为联合分布还包含 X 与 Y 的关联信息）。

4.1 边缘分布函数

设 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$，则分量 X、Y 各自的分布函数

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\le x,\ Y<+\infty\}=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=F(x,+\infty)$$

$$F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=F(+\infty,y)$$

分别称为 (X,Y) 关于 X、关于 Y 的**边缘分布函数**。

例如对例 4 求得的 $F(x,y)$，令 $y\to+\infty$ 得：$x<0$ 时 $F_X(x)=0$；$0\le x\le 2$ 时 $F_X(x)=\frac{x}{2}$；$x>2$ 时 $F_X(x)=1$。同理 $y\le 0$ 时 $F_Y(y)=0$；$y>0$ 时 $F_Y(y)=1-e^{-2y}$。

4.2 边缘分布律【高频考点】

设 (X,Y) 的分布律为 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$，则：

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_j p_{ij}\quad(i=1,2,\cdots)$$

$$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_i p_{ij}\quad(j=1,2,\cdots)$$

记忆口诀：关于 X 的边缘分布律 = 联合分布律表中**各行概率相加**；关于 Y 的边缘分布律 = **各列概率相加**。

分别称为 (X,Y) 关于 X、关于 Y 的**边缘分布律**，常记在联合分布律表的右边缘与下边缘。

以例 2 的分布律表为例：各行相加得 X 的边缘分布律 $P\{X=0\}=\frac{10}{30}$，$P\{X=1\}=\frac{20}{30}$；各列相加得 Y 的边缘分布律 $P\{Y=0\}=\frac{5}{30}$，$P\{Y=1\}=\frac{18}{30}$，$P\{Y=2\}=\frac{7}{30}$。

对例 3 的骰子问题：关于 X 的边缘分布律为

$$P\{X=i\}=\sum_{j=3}^{6}\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1},\quad i=1,2,\cdots$$

关于 Y 的边缘分布律为 $P\{Y=j\}=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}=\frac{1}{4}$，$j=3,4,5,6$。

4.3 边缘概率密度【高频考点】

设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，则分量 X、Y 都是连续型随机变量，且

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y,\qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

分别称为 (X,Y) 关于 X、关于 Y 的**边缘概率密度**。

例 6　设 (X,Y) 的概率密度为：当 $0\le x\le 1$，$0\le y\le 2x$ 时 $f(x,y)=2xy$，其余处为 0。求关于 X 和 Y 的边缘概率密度。

解：非零区域由 $y=0$、$y=2x$、$x=1$ 围成。

求 $f_X(x)$：当 $0\le x\le 1$ 时，固定 x，y 从 0 到 $2x$：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{2x}2xy\,\mathrm{d}y=xy^2\big|_0^{2x}=4x^3$$

当 $x<0$ 或 $x>1$ 时 $f_X(x)=0$。

求 $f_Y(y)$：当 $0\le y\le 2$ 时，固定 y，x 从 $\frac{y}{2}$ 到 1：

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{y}{2}}^{1}2xy\,\mathrm{d}x=yx^2\big|_{\frac{y}{2}}^{1}=y\left(1-\frac{y^2}{4}\right)$$

其余处 $f_Y(y)=0$。

同类题（$f(x,y)=1$，$0<x<1$，$-x<y<x$）：$f_X(x)=2x$（$0<x<1$）；$f_Y(y)=1+y$（$-1<y\le 0$），$f_Y(y)=1-y$（$0<y<1$），即 $f_Y(y)=1-|y|$。

重要结论（二维正态的边缘分布）：若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$，则

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\qquad Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

注意边缘正态中均不含 ρ：相同的边缘正态可以对应不同的联合分布，再次说明**边缘分布不能确定联合分布**。

易错提示

求边缘密度的关键是**积分限由联合密度的非零区域确定**（”画线定限法”：固定 x 画一条竖线，穿入穿出非零区域的纵坐标即为 y 的下、上限），绝不能直接对全平面积分而不讨论分段。

5 条件分布

5.1 条件分布律

设 (X,Y) 为二维离散型随机变量，分布律为 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$。

- 若 $P\{X=x_i\}>0$，则

$$P\{Y=y_j\,|\,X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,\ Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},\quad j=1,2,\cdots$$

称为在 $X=x_i$ 条件下 Y 的**条件分布律**；

- 若 $P\{Y=y_j\}>0$，则

$$P\{X=x_i\,|\,Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,\ Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\quad i=1,2,\cdots$$

称为在 $Y=y_j$ 条件下 X 的**条件分布律**。

例 7　设 (X,Y) 的分布律同例 2 的表格，求在 $Y=2$ 的条件下 X 的条件分布律。

解：先算边缘概率 $P\{Y=2\}=\frac{1}{30}+\frac{6}{30}=\frac{7}{30}$。于是

$$P\{X=0\,|\,Y=2\}=\frac{P\{X=0,Y=2\}}{P\{Y=2\}}=\frac{1/30}{7/30}=\frac{1}{7}$$

$$P\{X=1\,|\,Y=2\}=\frac{P\{X=1,Y=2\}}{P\{Y=2\}}=\frac{6/30}{7/30}=\frac{6}{7}$$

5.2 条件概率密度【高频考点】

对连续型 (X,Y)，由于 $P\{Y=y\}=0$，条件分布需用极限方式定义。设

$$F_{X|Y}(x\,|\,y)=P\{X\le x\,|\,Y=y\}=\lim_{\varepsilon\to0^+}P\{X\le x\,|\,y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}$$

称为在 $Y=y$ 条件下 X 的**条件分布函数**。可证当 $f_Y(y)>0$ 时，

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

称为在 $Y=y$ 条件下 X 的**条件概率密度**，且 $F_{X|Y}(x\,|\,y)=\int_{-\infty}^{x}f_{X|Y}(u\,|\,y)\,\mathrm{d}u$。同理，当 $f_X(x)>0$ 时，

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

例 8　设 (X,Y) 的概率密度为：当 $0\le x\le1$，$0\le y\le2x$ 时 $f(x,y)=2xy$，其余处为 0（同例 6）。(1) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x\,|\,y)$ 与 $f_{Y|X}(y\,|\,x)$；(2) 求 $P\{X\ge\frac34\,|\,Y=1\}$；(3) 求 $P\{Y\le\frac12\,|\,X=\frac12\}$。

解：(1) 由例 6 已知 $f_X(x)=4x^3$（$0\le x\le1$），$f_Y(y)=y\left(1-\frac{y^2}{4}\right)$（$0\le y\le2$）。

当 $0<y<2$ 时 $f_Y(y)>0$，条件密度的非零范围为 $\frac{y}{2}\le x\le1$：

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{2xy}{y\left(1-\frac{y^2}{4}\right)}=\frac{8x}{4-y^2},\quad\frac{y}{2}\le x\le1$$

当 $0<x\le1$ 时 $f_X(x)>0$，条件密度的非零范围为 $0\le y\le2x$：

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{2xy}{4x^3}=\frac{y}{2x^2},\quad0\le y\le2x$$

其余情形条件密度为 0。

(2) 代入 $y=1$：$f_{X|Y}(x\,|\,1)=\frac{8x}{3}$（$\frac12\le x\le1$），故

$$P\left\{X\ge\frac34\,|\,Y=1\right\}=\int_{\frac34}^{+\infty}f_{X|Y}(x\,|\,1)\,\mathrm{d}x=\int_{\frac34}^{1}\frac83x\,\mathrm{d}x=\frac43x^2\Big|_{\frac34}^{1}=\frac{7}{12}$$

(3) 代入 $x=\frac12$：$f_{Y|X}(y\,|\,\frac12)=2y$（$0\le y\le1$），故

$$P\left\{Y\le\frac12\,|\,X=\frac12\right\}=\int_0^{\frac12}2y\,\mathrm{d}y=y^2\Big|_0^{\frac12}=\frac14$$

同类结论（$f(x,y)=1$，$0<x<1$，$-x<y<x$）：$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{1}{2x}$（$-x<y<x$）；当 $-1<y\le0$ 时 $f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{1}{1+y}$（$-y<x<1$），当 $0<y<1$ 时 $f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{1}{1-y}$（$y<x<1$）。

考场提醒

- 连续型条件概率 $P\{X\in G\,|\,Y=y\}$ **不能**用 $\frac{P\{X\in G,Y=y\}}{P\{Y=y\}}$ 计算（分母为 0），必须先求条件密度再积分；
- 条件密度的非零区间**随条件值变化**（如本例中随 y 变化），代入条件值前先写清一般范围。

6 随机变量的独立性

6.1 独立性的定义与离散型判别【高频考点】

定义：设 X, Y 为两个随机变量，若对任意实数 x, y，都有

$$P\{X \le x,\ Y \le y\} = P\{X \le x\} \cdot P\{Y \le y\}$$

则称 X 与 Y **相互独立**。等价地（判别定理一）：

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

离散型判别定理：设 (X, Y) 的分布律为 p_{ij}，则 X 与 Y 相互独立的充要条件是：对一切 $i, j = 1, 2, \cdots$，都有

$$p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$$

例 9　(1) 设 (X, Y) 的分布律为：X 取 $-1, 2$，Y 取 $0, 1, 2$，对应概率依次为第一行 $0.1, 0.2, 0.1$，第二行 $0.2, 0.1, 0.3$。判别 X 与 Y 是否独立。(2) 已知 X 取 $-1, 0, 1$，分布律为 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$；$Y$ 取 $0, 1$，分布律为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$，且 $P\{XY = 0\} = 1$。求 (X, Y) 的联合分布律，并判别 X 与 Y 是否独立。

解：(1) 行和得 $P\{X = -1\} = 0.4$，$P\{X = 2\} = 0.6$；列和得 $P\{Y = 0\} = 0.3$，$P\{Y = 1\} = 0.3$，$P\{Y = 2\} = 0.4$。取一格验证：

$$P\{X = -1, Y = 0\} = 0.1 \ne 0.4 \times 0.3 = P\{X = -1\} \cdot P\{Y = 0\}$$

故 X 与 Y **不独立**。

(2) 由 $P\{XY = 0\} = 1$ 知 $P\{XY \ne 0\} = 0$，即 $P\{X = -1, Y = 1\} = P\{X = 1, Y = 1\} = 0$。结合边缘分布律填满表格：$P\{X = -1, Y = 0\} = \frac{1}{4}$，$P\{X = 0, Y = 1\} = \frac{1}{2}$，$P\{X = 1, Y = 0\} = \frac{1}{4}$，$P\{X = 0, Y = 0\} = 0$。验证：

$$P\{X = 1, Y = 1\} = 0 \ne \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = P\{X = 1\} \cdot P\{Y = 1\}$$

故 X 与 Y **不独立**。

再回看例 3 的骰子问题：对一切 $i = 1, 2, \cdots$ 及 $j = 3, 4, 5, 6$，

$$p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} = p_{ij}$$

故该例中 X 与 Y **相互独立**。

易错提示

- 否定独立性只需找一对 (i, j) 使乘积关系不成立（常找含 0 概率的格子）；肯定独立性则必须验证**所有**格子都满足，不能只验一格；
- 联合分布律表中出现 0 概率格子，且对应行、列边缘概率均非 0 时，X 与 Y 必不独

立。

6.2 连续型独立性判别与综合应用【高频考点】

连续型判别定理：设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，$f_X(x)$、$f_Y(y)$ 为边缘密度，则 X 与 Y 相互独立的充要条件是：几乎处处有

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

典型示范：设 $F(x,y)=1-e^{-2x}-e^{-3y}+e^{-(2x+3y)}$ $(x>0,y>0)$，其余为 0。因 $F(x,y)=\left(1-e^{-2x}\right)\left(1-e^{-3y}\right)$，令 $y\to+\infty$、$x\to+\infty$ 分别得 $F_X(x)=1-e^{-2x}$，$F_Y(y)=1-e^{-3y}$；混合偏导得 $f(x,y)=6e^{-2x-3y}$，而 $f_X(x)=2e^{-2x}$，$f_Y(y)=3e^{-3y}$，恰好 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 相互独立。

两条重要结论：

1. 若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$，则 X 与 Y 相互独立的充要条件是 $\rho=0$（对一般随机变量，”不相关”推不出独立，这是二维正态特有的性质）；
2. 二维均匀分布的分量**不一定**服从一维均匀分布，也**不一定**独立。例如单位圆域上 $f(x,y)=\frac{1}{\pi}$ $(x^2+y^2\le 1)$，则

$$f_X(x)=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\quad(-1\le x\le 1)$$

$f_Y(y)=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}$，二者同分布但 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，故不独立。而矩形区域 $0\le x\le 1$，$0\le y\le 2$ 上的均匀分布（$f=\frac{1}{2}$），$f_X(x)=1$ $(0\le x\le 1)$，$f_Y(y)=\frac{1}{2}$ $(0\le y\le 2)$，均为均匀分布且相互独立。

例 10　某型号钻头的寿命（以钻进深度 m 为单位）服从参数 $\lambda=0.002$ 的指数分布。欲打一口深为 500 m 的井，求恰好需用两只钻头的概率。

解：设第一、二只钻头的寿命为 X,Y，则

$$f_X(x)=0.002\,e^{-0.002x}\ (x>0),\qquad f_Y(y)=0.002\,e^{-0.002y}\ (y>0)$$

且 X 与 Y 相互独立，故 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$。事件 A =”500 m 的井恰需两只钻头”$=\{X<500,\ X+Y\ge 500\}$，于是

$$P(A)=P\{X<500,\ X+Y\ge 500\}=\int_0^{500}\mathrm{d}x\int_{500-x}^{+\infty}0.002^2e^{-0.002(x+y)}\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{500}0.002\,e^{-0.002x}\cdot e^{-0.002(500-x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^{500}0.002\,e^{-1}\,\mathrm{d}x=e^{-1}\approx 0.368$$

6.3 有限多个随机变量的独立性【了解】

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 n 个随机变量，若对任意实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，有

$$P\{X_1 \le x_1, \cdots, X_n \le x_n\} = P\{X_1 \le x_1\} \cdots P\{X_n \le x_n\}$$

则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ **相互独立**。等价判别：$F(x_1, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n)$；连续型时等价于 $f(x_1, \cdots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n)$。

7 本章总结

7.1 必背公式汇总

1. 联合分布函数：$F(x, y) = P\{X \le x,\ Y \le y\}$；
2. 矩形区域概率：$P\{x_1 < X \le x_2,\ y_1 < Y \le y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$；
3. 分布函数极限：$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$，$F(+\infty, +\infty) = 1$；
4. 离散型归一性：$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$；区域概率 $P\{(X, Y) \in D\} = \sum_{(x_i, y_j) \in D} p_{ij}$；
5. 联合密度定义：$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(u, v)\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v$，归一性 $\iint f\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$；
6. 密度与分布函数互求：$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$（连续点处）；
7. 连续型区域概率：$P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$；
8. 边缘分布函数：$F_X(x) = F(x, +\infty)$，$F_Y(y) = F(+\infty, y)$；
9. 边缘分布律：$p_{i\cdot} = \sum_j p_{ij}$（行和），$p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij}$（列和）；
10. 边缘密度：$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}y$，$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}x$；
11. 条件分布律：$P\{X = x_i \,|\, Y = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$；
12. 条件密度：$f_{X|Y}(x \,|\, y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$（$f_Y(y) > 0$），$f_{Y|X}(y \,|\, x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$（$f_X(x) > 0$）；
13. 独立性判别：$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$；离散型 $p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}$（所有 i, j）；连续型 $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$；
14. 二维均匀分布：$f(x, y) = \frac{1}{A}$（$(x, y) \in D$），概率 = 面积之比；
15. 二维正态：$(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho) \Rightarrow X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$；$X, Y$ 独立 $\Leftrightarrow \rho = 0$。

7.2 重要求解方法与套路

套路一：定常数。第 1 步：识别类型（分布函数用 $F(\pm\infty)$ 的极限，离散型用 $\sum\sum p_{ij} = 1$，连续型用 $\iint f = 1$）；第 2 步：列方程逐个解出常数；第 3 步：回代并验证非负性。

套路二：由 $f(x, y)$ 求 $F(x, y)$。第 1 步：画出 f 的非零区域；第 2 步：以区域顶点、边界线划分全平面；第 3 步：对 (x, y) 落在每一块的情形计算 $\int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v$（积分区域是非零区域与左下无穷矩形的交）；第 4 步：分段写出 F，用交界处的连续性检验。

套路三：求区域概率 $P\{(X, Y) \in D\}$。第 1 步：画出 D 与密度非零区域的**交** D_1；第 2 步：在 D_1 上定限积分 $\iint_{D_1} f\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

套路四：求边缘密度。第 1 步：画非零区域；第 2 步：固定 x 画竖线，穿入、穿出点的纵坐标作为 y 的积分下、上限，算出 $f_X(x)$ 并注明 x 的范围；第 3 步：同理求 $f_Y(y)$。

套路五：求条件密度与条件概率。第 1 步：先求边缘密度（作分母）；第 2 步：写 $f_{X|Y}=\frac{f}{f_Y}$ 并注明非零范围（随条件值变化）；第 3 步：求 $P\{X\in G\,|\,Y=y\}$ 时代入条件值后对条件密度积分。

套路六：判别独立性。第 1 步：求出两个边缘分布；第 2 步：离散型逐格验 $p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$（否定只需一反例，优先找 0 概率格）；连续型验 $f=f_Xf_Y$。快速判据：若 $f(x,y)=g(x)h(y)$ 可分离变量**且**非零区域是边平行于坐标轴的矩形，则独立；区域非矩形（如圆、三角形）则必不独立。

7.3 重要题型归纳

题型	识别特征	解题套路 / 所用公式
定常数	F 或 f 或 p_{ij} 中含未知常数	$F(\pm\infty)$ 极限；$\sum\sum p_{ij}=1$；$\iint f=1$
求矩形区域概率	已知 $F(x,y)$	$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)$
求联合分布律	两次抽取、直到某事件停止等	翻译事件交 + 乘法公式/古典概型，列表，验 $\sum\sum=1$
由 f 求 F	密度分区域非零	分区域讨论，逐块二重积分，注意连续性
区域概率	求 $P\{Y\le X\}$、$P\{X+Y\le a\}$ 等	取 D 与非零区域之交，$\iint_{D_1} f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
求边缘分布	已知联合分布律或联合密度	离散：行和/列和；连续：画线定限积分
求条件分布	”在 $Y=y$ 条件下”	条件分布律 $=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$；条件密度 $=\frac{f}{f_Y}$，再积分
判别独立性	问”是否独立”	离散找反例/验所有格；连续验 $f=f_Xf_Y$；正态看 ρ
独立性综合应用	两个独立分量求事件概率	$f=f_Xf_Y$ 得联合密度，再在对应区域积分
二维均匀分布	”D 上服从均匀分布”	概率 = 面积比；注意边缘不一定均匀、分量不一定独立

7.4 易错点清单

- $F(x,y)$ 定义在全平面上，分段讨论时**不要漏掉任何一块区域**，”其它为 0” 不能省；
- 矩形公式的符号是” 右上加、左下加、另两角减”，写反会导致概率为负；
- 求边缘密度时积分限由**联合密度的非零区域**决定，随 x（或 y）变化，不能写成常数限；
- 边缘密度结果必须**分段注明自变量范围**，只写非零段不给范围要扣分；
- 条件密度仅在分母边缘密度大于 0 时有定义，且其非零区间**随条件值变化**；
- 连续型中 $P\{X\ge a\,|\,Y=y\}\neq\frac{P\{X\ge a,Y=y\}}{P\{Y=y\}}$（分母为 0），必须对条件密度积分；
- 由两个边缘分布**不能**反推联合分布（除非已知独立）；

- 验证不独立只需一对反例；验证独立必须对所有取值成立；
- 二维均匀分布的边缘分布不一定是一维均匀分布，分量也不一定独立（矩形区域才两者皆成立）；
- 对一般随机变量，不相关推不出独立；只有**二维正态**才有" 独立 $\Leftrightarrow \rho = 0$"；
- 区域概率积分的被积函数只在非零区域上非零，积分区域应取 D 与非零区域的交，而不是整个 D。