第四章　随机变量的函数的分布

图文并茂详细学习笔记

依据课程 PPT 课件整理

2026 年 11 月 16 日

摘　要

本章研究已知随机变量（或二维随机变量）的分布，求其函数 $Y=g(X)$、$Z=g(X,Y)$ 的分布，包括：离散型函数的分布律（相同取值合并概率）、一维连续型函数的密度（分布函数法与单调函数公式法）、二维连续型函数（$Z=X+Y$ 的卷积公式、$Z=aX+bY+c$、$\max/\min$ 分布）以及泊松分布与正态分布的可加性。本章是期末解答题必考章节，卷积公式、$\max/\min$ 分布、单调函数密度公式是最高频考点。

目录

本章知识框架 **2**

1　离散型随机变量的函数的分布 **2**

1.1　一维离散型随机变量的函数的分布律 2

1.2　二维离散型随机变量的函数的分布律 3

1.3　泊松分布的可加性【高频考点】 4

2　一维连续型随机变量的函数的分布 **5**

2.1　分布函数法（一般方法）【高频考点】 5

2.2　公式法：严格单调函数的密度公式【高频考点】 5

2.3　逐段单调情形（定理 2） 6

2.4　已知分布函数求函数的分布（非单调函数） 7

3　二维连续型随机变量的函数的分布 **8**

3.1　一般方法（分布函数法） 8

3.2　$Z = X + Y$ 的分布与卷积公式【高频考点】 8

3.3　$Z = aX + bY + c$ 的分布 9

3.4　$Z = \max(X, Y)$ 与 $Z = \min(X, Y)$ 的分布【高频考点】 9

3.5　综合应用：备用系统 11

4　关于正态分布的重要结论【高频考点】 **12**

5　本章总结 **12**

5.1　必背公式汇总 12

5.2　重要求解方法与套路 13

5.3　重要题型归纳 14

5.4　易错点清单 14

本章知识框架

随机变量的函数的分布
• 离散型：一维函数的分布律（定理 1）→ 二维函数的分布律（定理 2，合并同类取值）→ 泊松分布可加性
• 一维连续型：分布函数法（万能方法）→ 公式法（严格单调：f[h(y)] · |h'(y)|）→ 逐段单调求和（定理 2）
• 二维连续型：分布函数法（二重积分）→ Z=X+Y（卷积公式）→ Z=aX+bY+c → max/min 分布 → 正态分布可加性

1　离散型随机变量的函数的分布

1.1　一维离散型随机变量的函数的分布律

定理 1 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=x_i\}=p_i$，$i=1,2,\cdots$。

(1) 若对 X 的不同取值 x_i，$Y=g(X)$ 的取值 $g(x_i)=y_i$ 也不同，则

$$P\{Y=y_i\}=P\{g(X)=g(x_i)\}=P\{X=x_i\}=p_i,\quad i=1,2,\cdots$$

(2) 若 X 的有限个或可列无穷多个不同取值 x_{i_k} 使 $g(x_{i_1})=g(x_{i_2})=\cdots=y^*$，则把这些取值的概率**合并相加**：

$$P\{Y=y^*\}=P\{g(X)=y^*\}=\sum_k P\{X=x_{i_k}\}$$

操作口诀：把 X 的每个取值代入 $g(x)$，得 Y 的取值表；Y 取值相同的项概率相加。

例 1 已知随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.2	0.4	0.2

试求：(1) $2X+1$；(2) X^2-1 的分布律。

解先列出函数取值对照表：

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.2	0.4	0.2
$2X+1$	-1	1	3	5
X^2-1	0	-1	0	3

(1) $2X+1$ 的四个取值互不相同，直接抄概率：

$2X+1$	-1	1	3	5
P	0.2	0.2	0.4	0.2

(2) X^2-1 中 $X=-1$ 与 $X=1$ 都对应 0，合并概率 $0.2+0.4=0.6$：

X^2-1	-1	0	3
P	0.2	0.6	0.2

易错提示

- 函数值相同的项**必须合并概率**，分布律中同一取值只能出现一次；
- 写完后验证所有概率之和等于 1。

练习结论（课件例 3）：设 $P\{X=k\}=\frac{1}{2^k}$，$k=1,2,\cdots$，求 $Y=\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$ 的分布律。由 Y 只取 $1,0,-1$ 三个值，按 X 的取值分类求和（等比级数）：

$$P\{Y=1\}=\sum_{n=0}^{+\infty}P\{X=4n+1\}=\frac{8}{15},\quad P\{Y=0\}=\sum_{n=1}^{+\infty}P\{X=2n\}=\frac{1}{3},\quad P\{Y=-1\}=\frac{2}{15}$$

1.2 二维离散型随机变量的函数的分布律

定理 2 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布律为 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$，$i,j=1,2,\cdots$。

(1) 若不同取值 (x_i,y_j) 对应的 $g(x_i,y_j)$ 也不同，则

$$P\{Z=z_{ij}\}=P\{g(X,Y)=g(x_i,y_j)\}=P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$$

(2) 若若干不同取值 (x_{i_k},y_{j_k}) 使 $g(x_{i_k},y_{j_k})=z^*$，则

$$P\{Z=z^*\}=P\{g(X,Y)=z^*\}=\sum_{k}P\{X=x_{i_k},Y=y_{j_k}\}$$

例 2 已知二维随机变量 (X,Y) 的分布律

X \{} Y	0	1	2
-1	0.1	0.2	0.1
2	0.2	0.1	0.3

试求：(1) $2X+Y$；(2) $XY+1$；(3) $\max(X,Y)$ 的分布律。

解先列六点对照表：

(X,Y)	$(-1,0)$	$(-1,1)$	$(-1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$
P	0.1	0.2	0.1	0.2	0.1	0.3
$2X+Y$	-2	-1	0	4	5	6
$XY+1$	1	0	-1	1	3	5
$\max(X,Y)$	0	1	2	2	2	2

(1) $2X+Y$ 六值互异：

$2X+Y$	-2	-1	0	4	5	6
P	0.1	0.2	0.1	0.2	0.1	0.3

(2) $XY+1$ 中 $(-1,0)$ 与 $(2,0)$ 都给出 1，合并：

$XY+1$	-1	0	1	3	5
P	0.1	0.2	0.3	0.1	0.3

(3) $\max(X,Y)$ 取 2 的点有四个，概率合并 $0.1+0.2+0.1+0.3=0.7$：

$\max(X,Y)$	0	1	2
P	0.1	0.2	0.7

例 4 结论摘录（课件例 4）：设 X_1,X_2,X_3 相互独立且服从同一 (0-1) 分布，$P\{X_i=1\}=p$，$P\{X_i=0\}=q=1-p$。令 Y_1 表示 X_1+X_2 的奇偶（奇取 1，偶取 0），Y_2 表示 X_2+X_3 的奇偶。先求得 (Y_1,Y_2) 的联合分布律：

(Y_1,Y_2)	$(1,0)$	$(1,1)$	$(0,1)$	$(0,0)$
P	pq	pq	pq	$1-3pq$

于是 $Z_1=2Y_1-Y_2$ 取值 $2,1,-1,0$，对应概率依次为 pq，pq，pq，$1-3pq$；$Z_2=\min(Y_1,Y_2)$ 的分布律为 $P\{Z_2=1\}=pq$，$P\{Z_2=0\}=1-pq$。

1.3 泊松分布的可加性【高频考点】

例 4（泊松分布的可加性）设 $X\sim\Pi(\lambda_1)$，$Y\sim\Pi(\lambda_2)$，且相互独立，试证 $Z=X+Y\sim\Pi(\lambda_1+\lambda_2)$。

证已知

$$P\{X=i\}=\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^i}{i!},\ i=0,1,2,\cdots;\qquad P\{Y=j\}=\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^j}{j!},\ j=0,1,2,\cdots$$

把事件 $\{Z=k\}=\{X+Y=k\}$ 按 X 的取值拆成互不相容事件之和，再用独立性：

$$P\{Z=k\}=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i,Y=k-i\}=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i\}\cdot P\{Y=k-i\}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^i}{i!}\cdot\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}C_k^i\,\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}(\lambda_1+\lambda_2)^k,\quad k=0,1,2,\cdots$$

故由泊松分布的定义知 $Z=X+Y\sim\Pi(\lambda_1+\lambda_2)$。

例 5（配套结论）设 $X\sim\Pi(\lambda_1)$，$Y\sim\Pi(\lambda_2)$ 且相互独立，则在 $X+Y=n$ 条件下 X 的条件分布为二项分布：

$$P\{X=k\mid X+Y=n\}=\frac{P\{X=k,Y=n-k\}}{P\{X+Y=n\}}=C_n^k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$

其中 $k=0,1,2,\cdots,n$。即 $X\mid\{X+Y=n\}\sim B\left(n,\ \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$。

考场提醒

- 可加性证明的关键一步：分母凑出 $k!$、分子凑出二项式定理 $\sum_i C_k^i\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}=(\lambda_1+\lambda_2)^k$；
- 二项分布也有可加性：$B(n_1,p)+B(n_2,p)\sim B(n_1+n_2,p)$（要求独立且 p 相同）。

2 一维连续型随机变量的函数的分布

2.1 分布函数法（一般方法）【高频考点】

已知连续型随机变量 X 的概率密度 $f(x)$，求 $Y=g(X)$ 的概率密度，**万能套路**：

第 1 步：写出 Y 的分布函数定义 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}$；

第 2 步：把不等式 $g(X)\le y$ 解成 X 的范围，化为积分

$$F_Y(y)=P\{g(X)\le y\}=\int_{g(x)\le y}f(x)\,\mathrm{d}x$$

第 3 步：对 y 分段讨论（以 $g(x)$ 在 X 取值区间上的最小值、最大值、拐值为分界点）；

第 4 步：求导得密度 $f_Y(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_Y(y)$（或 $f_Z(z)=F_Z'(z)$），并写清 y 的取值范围。

例 1 设随机变量 X 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上服从均匀分布，试求 $Y=\tan X$ 的概率密度。

解 X 的概率密度为：当 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 时 $f(x)=\frac{1}{\pi}$，其它为 0。

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\tan X\le y\}=P\{X\le\arctan y\}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arctan y}\frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\arctan y+\frac{\pi}{2}\right)$$

所以

$$f_Y(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_Y(y)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2},\quad -\infty<y<+\infty$$

这正是**柯西分布**的密度。

2.2 公式法：严格单调函数的密度公式【高频考点】

定理 1 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，函数 $y=g(x)$ 在区间 (a,b) 上**严格单调**，其反函数 $x=h(y)$ 有连续导数，则 $Y=g(X)$ 是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y)=f[h(y)]\cdot|h'(y)|,\quad y\in(c,d);\quad f_Y(y)=0,\ y\notin(c,d)$$

其中 (c,d) 为 $y=g(x)$ 的值域；g 递增时 $h'(y)>0$，递减时 $h'(y)<0$（取绝对值后统一）。

例 2（课件例 2） 设 X 在 $(0,1)$ 内服从均匀分布，求 $Y=X^{\ln X}$ 的概率密度。

解 $y=x^{\ln x}=e^{\ln^2 x}$ 在 $(0,1)$ 内严格单调递减，X 在 $(0,1)$ 取值时 Y 在 $[1,+\infty)$ 取值。反函数及其导数：

$$x=h(y)=e^{-\sqrt{\ln y}},\qquad h'(y)=-\frac{1}{2y\sqrt{\ln y}}\,e^{-\sqrt{\ln y}}$$

因 $f(x)=1$ $(0<x<1)$，由定理 1：

$$f_Y(y)=f[h(y)]\cdot|h'(y)|=\frac{1}{2y\sqrt{\ln y}}\,e^{-\sqrt{\ln y}},\quad y>1;\quad f_Y(y)=0,\ y\le 1$$

重要结论（正态变量的线性变换） 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则

$$Y=k_1X+k_2\sim N(k_1\mu+k_2,\ k_1^2\sigma^2)$$

特别地 $\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，从而 $F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$，$-\infty<x<+\infty$。

2.3 逐段单调情形（定理 2）

定理 2 若 $y=g(x)$ 不是严格单调的，但在不相重叠的区间 $I_1,I_2,\cdots$ 上**逐段严格单调**，反函数分别为 $h_1(y),h_2(y),\cdots$，且各 $h_i'(y)$ 连续，则 $Y=g(X)$ 是连续型随机变量，其概率密度为各段贡献**相加**：

$$f_Y(y)=f[h_1(y)]\cdot|h_1'(y)|+f[h_2(y)]\cdot|h_2'(y)|+\cdots,\quad y\in I^*$$

$f_Y(y)=0$（$y\notin I^*$），其中 I^* 是使各 $h_i'(y)$ 连续的 y 的集合。

例 3 设 X 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上服从均匀分布，求 $Y=\cos X$ 的概率密度。

解（分布函数法） $f(x)=\frac{1}{\pi}$ $\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$，其它为 0。$Y=\cos X$ 在 $[0,1]$ 取值。分四段讨论 $F_Y(y)=P\{\cos X\le y\}$：

(1) 当 $y<-1$ 时，$F_Y(y)=P\{\emptyset\}=0$；

(2) 当 $-1\le y<0$ 时，结合图形（在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上 $\cos x\ge 0$），$\{\cos X\le y\}$ 为不可能事件，$F_Y(y)=0$；

(3) 当 $0\le y<1$ 时，$\cos x\le y$ 对应两段区间，

$$F_Y(y)=P\{X\le-\arccos y\}+P\{X\ge\arccos y\}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arccos y}\frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}x+\int_{\arccos y}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arccos y\right)+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arccos y\right)$$

$$f_Y(y)=[F_Y(y)]'=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad 0\le y<1$$

(4) 当 $y\ge 1$ 时，$F_Y(y)=1$，密度为 0。

综上：

y 的范围	$f_Y(y)$
$0 \le y < 1$	$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
其它	0

例 4 结论摘录（课件例 4）：已知 X 的分布函数为 $F(x)=0$（$x \le 0$），$F(x)=\left(\frac{x}{\pi}\right)^2$ $(0<x<\pi)$，$F(x)=1$ $(x \ge \pi)$，求 $Y=\sin X$ 的密度。用定理 2，两段反函数 $h_1(y)=\arcsin y$，$h_2(y)=\pi-\arcsin y$，$|h_1'(y)|=|h_2'(y)|=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$，而 $f(x)=\frac{2x}{\pi^2}$（$0<x<\pi$），两段贡献相加恰得

$$f_Y(y)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad 0<y<1;\quad f_Y(y)=0,\ y\notin(0,1)$$

2.4 已知分布函数求函数的分布（非单调函数）

例 5 已知随机变量 X 的分布函数为：$F(x)=0$（$x<-1$）；$F(x)=\frac{1}{2}(1+x^3)$（$-1\le x\le 1$）；$F(x)=1$（$x>1$）。求 $Y=2X^2+1$ 的分布函数。

解第 1 步：$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X^2+1\le y\}=P\left\{X^2\le\frac{y-1}{2}\right\}$。

第 2 步：分段讨论。

(1) 当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=0$；

(2) 当 $y\ge 1$ 时，

$$F_Y(y)=P\left\{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\le X\le\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right\}=F\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)-F\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)$$

当 $1\le y\le 3$ 时（此时 $\sqrt{\frac{y-1}{2}}\le 1$，落在中间段），

$$F_Y(y)=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)^3\right\}-\frac{1}{2}\left\{1+\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)^3\right\}=\left(\frac{y-1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

当 $y>3$ 时，$F_Y(y)=1-0=1$。

综上：

y 的范围	$F_Y(y)$
$y<1$	0
$1\le y\le 3$	$\left(\frac{y-1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$
$y>3$	1

易错提示

- 非单调函数（如 X^2）**不能套定理 1**，要用分布函数法或定理 2；
- 反解 $X^2\le\frac{y-1}{2}$ 得到的是双边不等式，$F_Y(y)=F(b)-F(a)$，别只写一端；
- 分段点 $y=1,3$ 由 X 的取值范围 $[-1,1]$ 经 $2x^2+1$ 映射而来，先定值域再讨论。

3 二维连续型随机变量的函数的分布

3.1 一般方法（分布函数法）

设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，求 $Z=g(X,Y)$ 的密度：

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(X,Y)\le z\}=\iint_{D_z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad f_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}$$

其中 $D_z=\{(x,y)\mid g(x,y)\le z\}$。** 难点全在二重积分的区域 D_z 随 z 变化，要画图、按 z 分段。**

3.2 $Z=X+Y$ 的分布与卷积公式【高频考点】

设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，记 $D_z=\{(x,y)\mid x+y\le z\}$，则 $Z=X+Y$ 为连续型随机变量，且

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,\mathrm{d}y$$

若 X 与 Y **相互独立**，$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，则

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x=f_X(z)*f_Y(z)$$

右端的积分称为 f_X 与 f_Y 的**卷积**，记为 $f_X(z)*f_Y(z)$。

例 1 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为：$f(x,y)=\frac{1}{5}(2x+y)$ $(0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1)$，其它为 0。求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

解用 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,\mathrm{d}x$，被积函数非零要求 $0\le x\le 2$ 且 $0\le z-x\le 1$，即沿直线 $x+y=z$ 落在矩形 $[0,2]\times[0,1]$ 内的线段上积分。按 z 分四段：

(1) 当 $z<0$ 或 $z>3$ 时，直线与矩形不交，$f_Z(z)=0$；

(2) 当 $0\le z\le 1$ 时，x 从 0 到 z，

$$f_Z(z)=\int_0^z \frac{1}{5}[2x+(z-x)]\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}(x^2+zx)\,|_0^z=\frac{3}{10}z^2$$

(3) 当 $1<z\le 2$ 时，x 从 $z-1$ 到 z，

$$f_Z(z)=\int_{z-1}^z \frac{1}{5}[2x+(z-x)]\,\mathrm{d}x=\frac{1}{10}(4z-1)$$

(4) 当 $2<z\le 3$ 时，x 从 $z-1$ 到 2，

$$f_Z(z)=\int_{z-1}^2 \frac{1}{5}[2x+(z-x)]\,\mathrm{d}x=\frac{1}{10}(3+8z-3z^2)$$

综上：

z 的范围	$f_Z(z)$
$0 \le z \le 1$	$\frac{3}{10}z^2$
$1 < z \le 2$	$\frac{1}{10}(4z-1)$
$2 < z \le 3$	$\frac{1}{10}(3+8z-3z^2)$
其它	0

考场提醒

- 确定每段积分上下限的唯一可靠办法：** 画出密度非零区域，平移直线 $x+y=z$**，看它与区域边界的交点；
- 分段点取自区域各顶点的 $x+y$ 值（本题顶点处 $x+y=0,1,2,3$）；
- 写完可验证 $\int f_Z(z)\,\mathrm{d}z = 1$。

3.3 $Z = aX + bY + c$ 的分布

公式（a, b 不全为 0）：

若 $b \neq 0$，$f_Z(z) = \frac{1}{|b|}\int_{ax+by+c=z} f(x,y)\,\mathrm{d}x$（沿直线取 x 增加方向）；

若 $a \neq 0$，$f_Z(z) = \frac{1}{|a|}\int_{ax+by+c=z} f(x,y)\,\mathrm{d}y$（沿直线取 y 增加方向）。

例 3 设 (X,Y) 在区域 D：$0 \le x \le 1$，$0 \le y \le 2x$ 上服从均匀分布，求 $Z = 2X + Y$ 的概率密度。

解区域 D 面积为 1，故 $f(x,y) = 1$（$(x,y) \in D$），其它为 0。用公式（$b = 1$）：

$$f_Z(z) = \int_{2x+y=z} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

直线 $2x + y = z$ 与三角形 D 的交线随 z 变化（顶点处 $2x+y = 0, 2, 4$）：

- 当 $z < 0$ 或 $z > 4$ 时，$f_Z(z) = 0$；
- 当 $0 \le z \le 2$ 时，交线从 $y = 2x$（对应 $x = \frac{z}{4}$）到 $y = 0$（对应 $x = \frac{z}{2}$），

$$f_Z(z) = \int_{z/4}^{z/2} 1\,\mathrm{d}x = \frac{z}{4}$$

- 当 $2 < z \le 4$ 时，交线从 $x = \frac{z}{4}$ 到 $x = 1$，

$$f_Z(z) = \int_{z/4}^{1} 1\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{z}{4}$$

3.4 $Z = \max(X,Y)$ 与 $Z = \min(X,Y)$ 的分布【高频考点】

设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，分布函数为 $F(x,y)$。

**max 的分布 **（事件 $\{\max(X,Y) \le z\} = \{X \le z, Y \le z\}$）：

$$F_{\max}(z) = P\{X \le z, Y \le z\} = F(z,z) = \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

**min 的分布 **（用对立事件 $\{\min(X,Y)>z\}=\{X>z,Y>z\}$）：

$$F_{\min}(z)=1-P\{X>z,Y>z\}=F_X(z)+F_Y(z)-F(z,z)=1-\int_z^{+\infty}\int_z^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

**X 与 Y 相互独立时 **：

$$F_{\max}(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z),\qquad F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)]\cdot[1-F_Y(z)]$$

** 推广到 n 个相互独立的随机变量 **（X_i 的分布函数为 F_i）：

$$F_{\max}(z)=F_1(z)F_2(z)\cdots F_n(z),\qquad F_{\min}(z)=1-[1-F_1(z)][1-F_2(z)]\cdots[1-F_n(z)]$$

特别地，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布（分布函数为 F）时：

$$F_{\max}(z)=[F(z)]^n,\qquad F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^n$$

实际背景：并联系统寿命为 $\max(X,Y)$，串联系统寿命为 $\min(X,Y)$。

例 3 设 (X,Y) 的密度为 $f(x,y)=\frac{1}{5}(2x+y)$（$0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1$），其它为 0。求 $Z=\max(X,Y)$ 的概率密度。

解计算 $F_{\max}(z)=\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{z}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$：

- 当 $z<0$ 时，$F_{\max}(z)=0$；
- 当 $0\le z\le 1$ 时（正方形 $[0,z]^2$ 全在矩形内），

$$F_{\max}(z)=\int_0^z\int_0^z\frac{1}{5}(2x+y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{3}{10}z^3$$

- 当 $1<z\le 2$ 时（y 上限被 1 截断），

$$F_{\max}(z)=\int_0^z\int_0^1\frac{1}{5}(2x+y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\left(z^2+\frac{1}{2}z\right)$$

- 当 $z>2$ 时，$F_{\max}(z)=1$。

求导得：

z **的范围**	$f_{\max}(z)$
$0\le z\le 1$	$\frac{9}{10}z^2$
$1<z\le 2$	$\frac{1}{5}\left(2z+\frac{1}{2}\right)$
$z<0$ 或 $z>2$	0

例 4 结论摘录（同一密度求 $Z=\min(X,Y)$）：用 $F_{\min}(z)=1-\int_z^{+\infty}\int_z^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，当 $0\le z\le 1$ 时

$$F_{\min}(z)=1-\int_z^2\int_z^1\frac{1}{5}(2x+y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x=-\frac{3}{10}z^3+\frac{2}{5}z^2+\frac{9}{10}z$$

故 $f_{\min}(z)=-\frac{9}{10}z^2+\frac{4}{5}z+\frac{9}{10}$ $(0\le z\le 1)$，其它为 0。

例 5 已知某型号电子管的寿命（小时）近似服从 $N(235,30^2)$，随机取 3 只，寿命为 X_1,X_2,X_3。求：(1) $P\{\max(X_1,X_2,X_3)\le 250\}$；(2) $P\{\min(X_1,X_2,X_3)\ge 235\}$。

解 X_1,X_2,X_3 相互独立且同分布 $N(235,30^2)$。

(1)

$$P\{\max\le 250\}=P\{X_1\le 250\}\cdot P\{X_2\le 250\}\cdot P\{X_3\le 250\}=[F(250)]^3$$

$$=\left[\Phi\left(\frac{250-235}{30}\right)\right]^3=[\Phi(0.5)]^3=0.3307$$

(2)

$$P\{\min\ge 235\}=P\{X_1\ge 235\}\cdot P\{X_2\ge 235\}\cdot P\{X_3\ge 235\}=[1-F(235)]^3$$

$$=[1-\Phi(0)]^3=(1-0.5)^3=0.125$$

易错提示

- max 对应“都不超过”（交，概率相乘）；min 对应“都超过”（用 $1-F$ 相乘后再取补）——两者方向恰好相反，最常混淆；
- 公式 $F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z)$ 与 $F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$ **都要求独立性**，不独立时只能回到 $F(z,z)$ 与 $1-P\{X>z,Y>z\}$；
- 求密度时 max / min 的分布函数分段点由 X,Y 各自的取值上界共同决定（如例 3 中 $z=1$ 来自 y 的上界）。

3.5 综合应用：备用系统

例 6 设系统 L 由三个独立子系统组成，子系统 i 的寿命 X_i（$i=1,2,3$）的概率密度为：$f_i(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ $(x>0,\ \lambda>0)$，$f_i(x)=0$ $(x\le 0)$。子系统 3 为备用：当子系统 1、2 均失效时子系统 3 自动接通继续工作。求系统寿命的概率密度。

解第 1 步：明确系统寿命的结构。子系统 1、2 并联，$X=\max(X_1,X_2)$；再与备用的子系统 3 串联接力，$Y=X_3$，系统寿命 $Z=X+Y$。

第 2 步：求 $X=\max(X_1,X_2)$ 的密度。X_i 的分布函数为 $F_i(x)=1-e^{-\lambda x}$ $(x>0)$，

$$F_X(x)=[F_i(x)]^2=(1-e^{-\lambda x})^2,\quad x>0$$

$$f_X(x)=2\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x}),\quad x>0;\quad f_X(x)=0,\ x\le 0$$

第 3 步：$Y = X_3$ 的密度 $f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}$（$y > 0$）。$X$ 与 Y 独立，用卷积公式 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,\mathrm{d}x$：

- 当 $z \le 0$ 时，$f_Z(z) = 0$；
- 当 $z > 0$ 时，

$$f_Z(z) = \int_0^z 2\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x}) \cdot \lambda e^{-\lambda(z-x)}\,\mathrm{d}x = 2\lambda e^{-\lambda z}\left(\lambda z + e^{-\lambda z} - 1\right)$$

综上：$f_Z(z) = 2\lambda e^{-\lambda z}\left(\lambda z + e^{-\lambda z} - 1\right)$（$z > 0$），$f_Z(z) = 0$（$z \le 0$）。

4 关于正态分布的重要结论【高频考点】

结论 1（两个独立正态变量之和） 若 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$（$i = 1, 2$）且相互独立，则

$$Z = X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2,\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

特别地，X_1, X_2 独立同服从 $N(0,1)$ 时 $X_1 + X_2 \sim N(0, 2)$。

** 结论 2（n 个独立正态变量的线性组合）** 若 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$（$i = 1, 2, \cdots, n$）且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则

$$Z = \sum_{i=1}^{n} k_i X_i + b \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} k_i \mu_i + b,\ \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \sigma_i^2\right)$$

并且此时 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 服从 n 维正态分布；反之，n 维正态分布的每个分量 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$。

** 结论 3（n 维正态的刻画，了解）** $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 服从 n 元正态分布，当且仅当它们的任意线性组合 $l_0 + l_1 X_1 + l_2 X_2 + \cdots + l_n X_n$（$l_1, l_2, \cdots, l_n$ 不全为 0）均服从一元正态分布。

考场提醒

- 看到“独立正态变量的线性组合”，**不要卷积**，直接写均值与方差：期望线性相加，方差带系数平方相加；
- 可加性、n 维正态推出分量正态，都以**独立性 / 联合正态性**为前提；两个各自正态的变量之和不一定正态（缺独立性或联合正态性时结论失效）。

5 本章总结

5.1 必背公式汇总

1. 离散型函数（一维）：$P\{Y = y^*\} = \sum_k P\{X = x_{i_k}\}$（$g(x_{i_k}) = y^*$ 的项合并）
2. 离散型函数（二维）：$P\{Z = z^*\} = \sum_k P\{X = x_{i_k}, Y = y_{j_k}\}$
3. 单调函数密度公式：$f_Y(y) = f[h(y)] \cdot |h'(y)|$，$y \in (c, d)$（$(c, d)$ 为 g 的值域）
4. 逐段单调：$f_Y(y) = \sum_i f[h_i(y)] \cdot |h_i'(y)|$

5. 正态线性变换：$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则 $k_1X + k_2 \sim N(k_1\mu + k_2, k_1^2\sigma^2)$，$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$
6. 和的分布：$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)\,\mathrm{d}y$
7. 卷积公式（独立时）：$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x = f_X(z) * f_Y(z)$
8. 线性组合：$b \neq 0$ 时 $f_Z(z) = \frac{1}{|b|}\int_{ax+by+c=z} f(x,y)\,\mathrm{d}x$
9. max 分布：$F_{\max}(z) = F(z,z)$；独立时 $F_X(z)F_Y(z)$；独立同分布时 $[F(z)]^n$
10. min 分布：$F_{\min}(z) = F_X(z) + F_Y(z) - F(z,z)$；独立时 $1 - [1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$；独立同分布时 $1-[1-F(z)]^n$
11. 泊松可加性：$X \sim \Pi(\lambda_1)$，$Y \sim \Pi(\lambda_2)$ 独立，则 $X+Y \sim \Pi(\lambda_1+\lambda_2)$；且 $X \mid \{X+Y=n\} \sim B\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$
12. 正态可加性：$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ 独立，则 $\sum_{i=1}^n k_iX_i + b \sim N\left(\sum k_i\mu_i + b,\ \sum k_i^2\sigma_i^2\right)$

5.2 重要求解方法与套路

离散型函数的分布律：

第 1 步：把 X（或 (X,Y)）的每个取值代入 g，列出“取值—概率”对照表；

第 2 步：函数值相同的项合并概率；

第 3 步：按取值从小到大整理成分布律表，验证概率和为 1。

分布函数法（一维、万能）：

第 1 步：写 $F_Y(y) = P\{g(X) \le y\}$；

第 2 步：确定 Y 的值域，定出分段点；

第 3 步：逐段把 $g(X) \le y$ 反解为 X 的范围并积分；

第 4 步：对 $F_Y(y)$ 求导得 $f_Y(y)$，标注各段 y 的范围。

公式法（单调函数）：

第 1 步：验证 g 严格单调，求反函数 $x = h(y)$ 及 $h'(y)$；

第 2 步：确定值域 (c,d)；

第 3 步：代入 $f_Y(y) = f[h(y)]|h'(y)|$（非单调则分段用定理 2 相加）。

** 卷积法求 $Z = X+Y$（或 $aX+bY+c$）**：

第 1 步：画出 $f(x,y)$ 的非零区域，标出各顶点的 $x+y$（或 $ax+by+c$）值作为 z 的分段点；

第 2 步：对每个 z 段，沿直线 $x+y=z$ 确定积分上下限；

第 3 步：计算 $f_Z(z) = \int f(x, z-x)\,\mathrm{d}x$；

第 4 步：汇总写分段密度，检验积分为 1。

**max / min 分布 **：

第 1 步：判断是 max（“都不超过 z”，概率相乘）还是 min（“都超过 z”，先取补再相乘）；

第 2 步：独立时套乘积公式，不独立时回到 $F(z,z)$ 或 $1 - \int_z^{+\infty}\int_z^{+\infty} f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

第 3 步：需要密度时对 z 求导，注意分段。

5.3 重要题型归纳

题型	识别特征	解题套路/所用公式
离散型函数分布律	给分布律表，求 $g(X)$ 或 $g(X,Y)$	对照表逐点代入，同值合并概率
泊松可加性证明	两个独立泊松变量之和	拆分 $\{X+Y=k\}$，凑二项式定理
一维连续函数密度	给 $f(x)$ 求 $Y=g(X)$	单调用 $f[h(y)]\|h'(y)\|$；非单调用分布函数法分段
已知 $F(x)$ 求函数分布	给分布函数，求 F_Y	$F_Y(y)=P\{g(X)\le y\}$ 反解不等式后代入 F
和的分布	求 $Z=X+Y$（$aX+bY+c$）的密度	卷积公式，画图按 z 分段定积分限
max / min 分布	串并联系统、寿命最值	$F_{\max}=F(z,z)$；$F_{\min}=1-P\{X>z,Y>z\}$；独立套乘积公式
正态线性组合	独立正态变量的线性组合	直接写 $N(\sum k_i\mu_i+b,\ \sum k_i^2\sigma_i^2)$，再标准化查表
综合题	系统寿命含 max 与和	先 max 分布函数，再与第三部分卷积

5.4 易错点清单

- 离散型：函数值相同的项忘记合并概率，或分布律中同一取值重复列出。
- 公式法：忘记给 $h'(y)$ 加绝对值（递减函数会出负密度）。
- 公式法：漏写或写错 Y 的值域，密度非零区间张冠李戴。
- 分布函数法：反解不等式时，遇到 g 递减忘记改变不等号方向；遇到 X^2 忘记写成双边不等式。
- 分段讨论时漏段：分段点必须取遍区域顶点对应的函数值。
- 卷积：不画图直接定积分限，导致上下限错误；或被积函数忘记把 y 换成 $z-x$。
- max / min 记反：$\{\max\le z\}=\{X\le z,Y\le z\}$，$\{\min>z\}=\{X>z,Y>z\}$。
- 对不独立的 (X,Y) 滥用乘积公式 $F_{\max}=F_XF_Y$。
- 正态可加性忘记“相互独立”前提；把方差写成系数不带平方相加。
- 泊松记号：课件记泊松分布为 $\Pi(\lambda)$，不要与 $P(\lambda)$、$\pi(\lambda)$ 混用。