第五章　随机变量的数字特征

图文并茂详细学习笔记

依据课程 PPT 课件整理

2026 年 11 月 16 日

摘　要

本章研究随机变量的数字特征：数学期望、方差、协方差与相关系数以及矩。数学期望刻画取值的平均水平，方差刻画取值偏离均值的程度，协方差与相关系数刻画两个随机变量之间线性关系的强弱。本章是概率论计算的核心章节，考试占比高，常考题型有：由分布律或密度求期望与方差、利用期望方差性质与独立性综合计算、示性变量分解法、协方差与相关系数计算、不相关与相互独立的判定，务必熟练掌握。

目录

本章知识框架 **2**

1　数学期望 **2**

1.1　离散型随机变量的数学期望【高频考点】 2
1.2　连续型随机变量的数学期望【高频考点】 3
1.3　随机变量函数的数学期望【高频考点】 4
1.4　数学期望的性质【高频考点】 5
1.5　期望的分解求法（示性变量法）【高频考点】 5

2　方差 **6**

2.1　方差的定义与计算【高频考点】 6
2.2　方差的性质【高频考点】 7
2.3　标准化随机变量 7

3　常用分布的数学期望与方差【必背】 **7**

3.1　常用分布期望方差汇总表 8
3.2　典型推导思路（考推导时会用） 8
3.3　综合例题 8

4　协方差与相关系数 **9**

4.1　协方差的定义与性质【高频考点】 9
4.2　相关系数【高频考点】 10
4.3　独立与不相关的关系【高频考点】 10
4.4　二维正态综合例题 11

5　矩与协方差矩阵【了解】 **12**

5.1　矩的定义 12
5.2　协方差矩阵与 n 维正态分布 12

6　本章总结 **13**

6.1　必背公式汇总 13
6.2　重要求解方法与套路 14
6.3　重要题型归纳 15
6.4　易错点清单 15

本章知识框架

随机变量的数字特征
- 数学期望 EX：离散型与连续型定义（要求绝对收敛）→ 随机变量函数的期望 → 期望的性质 → 示性变量分解法
- 方差 DX：定义 $E(X-EX)^2$ → 计算公式 $DX=EX^2-(EX)^2$ → 方差的性质 → 常用分布的期望与方差表
- 协方差与相关系数：$Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY$ → 相关系数 ρ 与线性关系 → 独立推出不相关，反之不然（二维正态除外）
- 矩与协方差矩阵：原点矩、中心矩、混合矩 → 协方差矩阵 → n 维正态分布

1 数学期望

数字特征的意义：分布函数（分布律、概率密度）虽然完整描述了随机变量的全部概率规律，但实际应用中很难、也不需要掌握全部规律，只需知道某些统计特性——如平均水平（期望）、波动程度（方差）、两变量间的关系（协方差与相关系数）。描述随机变量特征的数字统称为**数字特征**。

1.1 离散型随机变量的数学期望【高频考点】

定义 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k$，$k=1,2,\ldots$。若级数 $\sum_{k=1}^{+\infty}x_kp_k$ **绝对收敛**（即 $\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|p_k$ 收敛），则称该级数为 X 的**数学期望**，记为 EX 或 $E(X)$：

$$EX=\sum_{k=1}^{+\infty}x_kp_k$$

直观理解：期望就是以概率为权重的加权平均（频率的稳定值是概率，故平均值稳定在期望附近）。

注意

- 期望存在的前提是绝对收敛，不是条件收敛；分布律本身满足 $\sum_k p_k=1$ 并不能保证期望存在。

例 1 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
P	0.4	0.3	0.3

求 EX，$E(3X^2+5)$。

解 由定义

$$EX=-2\times0.4+0\times0.3+2\times0.3=-0.2$$

由函数的期望公式（见 1.3），

$$E(3X^2+5)=[3(-2)^2+5]\times 0.4+[3\times 0^2+5]\times 0.3+[3\times 2^2+5]\times 0.3$$

$$=17\times(0.4+0.3)+5\times 0.3=13.4$$

例 2 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$，$a>0$，$k=0,1,2,\ldots$，求 EX。

解由定义并利用幂级数求和公式 $\sum_{k=1}^{+\infty}kx^{k-1}=\left(\sum_{k=1}^{+\infty}x^k\right)'=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$，

$$EX=\sum_{k=0}^{+\infty}k\cdot\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}=\frac{a}{(1+a)^2}\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{a}{1+a}\right)^{k-1}$$

$$=\frac{a}{(1+a)^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{a}{1+a}\right)^2}=a$$

1.2 连续型随机变量的数学期望【高频考点】

定义设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$。若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ **绝对收敛**（即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\mathrm{d}x$ 收敛），则称该积分为 X 的数学期望：

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$$

例 3 已知随机变量 X 的概率密度为

x **的范围**	$f(x)$
$0\le x\le 1$	x
$1<x\le 2$	$2-x$
其它	0

求 EX 和 EX^2。

解分段积分：

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1x\cdot x\mathrm{d}x+\int_1^2x(2-x)\mathrm{d}x=1$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1x^2\cdot x\mathrm{d}x+\int_1^2x^2(2-x)\mathrm{d}x=\frac{7}{6}$$

例 4（期望不存在的反例）设 X 服从柯西分布，概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$，$-\infty<x<+\infty$。问 X 的数学期望是否存在？

解考察绝对值积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\frac{x}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\pi}\ln(1+A^2)=+\infty$$

积分发散，即不绝对收敛，故**柯西分布的数学期望不存在**。

1.3 随机变量函数的数学期望【高频考点】

定理（一元函数）设 $Y=g(X)$，g 为连续函数，则 ** 不必先求 Y 的分布 **，直接计算：

- 离散型：$EY=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{+\infty}g(x_k)p_k$（要求绝对收敛）；
- 连续型：$EY=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x$（要求绝对收敛）。

定理（二元函数）设 $Z=g(X,Y)$，则：

- 离散型（联合分布律 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$）：

$$EZ=E[g(X,Y)]=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$$

- 连续型（联合概率密度 $f(x,y)$）：

$$EZ=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

均要求对应的级数或积分绝对收敛。

例 5 设 (X,Y) 的联合分布律为

Y \{} X	1	2
-1	0.25	0.5
1	0	0.25

求 EX、EY 及 $E(XY)$。

解利用 $EX=\sum_i\sum_j x_ip_{ij}=\sum_i x_iP\{X=x_i\}$（边沿分布）：

$$EX=1\times\frac{1}{4}+1\times 0+2\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$$

$$EY=(-1)\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)+1\times\left(0+\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$E(XY)=\sum_i\sum_j x_iy_jp_{ij}=1\times(-1)\times\frac{1}{4}+1\times 1\times 0+2\times(-1)\times\frac{1}{2}+2\times 1\times\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$$

例 6 设 (X,Y) 在矩形区域 $G:0\le x\le 1,0\le y\le 2$ 内服从均匀分布，求 $E(\sin^2 X\cdot\cos Y)$。

解 (X,Y) 的概率密度为：当 $(x,y)\in G$ 时 $f(x,y)=\frac{1}{2}$，其它为 0。于是

$$E(\sin^2 X\cdot\cos Y)=\int_0^1\int_0^2\sin^2 x\cos y\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\sin 2\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\sin 2\right)$$

1.4 数学期望的性质【高频考点】

1. 设 C 为常数，则 $E(C)=C$；
2. 设 C 为常数，则 $E(CX)=C\cdot EX$；
3. 设 X,Y 为**任意**随机变量，则 $E(X+Y)=EX+EY$（**不需要独立性**）。推广：

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i+b\right)=\sum_{i=1}^{n}a_iEX_i+b$$

1. 设 X,Y **相互独立**，则 $E(XY)=EX\cdot EY$。推广：若 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 相互独立，则

$$E(X_1X_2\cdots X_n)=EX_1\cdot EX_2\cdots EX_n$$

易错提示

- 性质 3（和的期望）对任意随机变量成立；性质 4（积的期望）必须有独立性（或不相关）作条件，不能随意使用。
- 反之，$E(XY)=EX\cdot EY$ 成立推不出 X 与 Y 独立（见第 4 节）。

例 7 设随机变量 X,Y 相互独立，概率密度分别为：$f(x)=2x$（$0\le x\le 1$，其它为 0）；$g(y)=e^{-(y-5)}$（$y>5$，$y\le 5$ 时为 0）。求 $E(3XY)$。

解先分别求期望：

$$EX=\int_0^1 x\cdot 2x\mathrm{d}x=\frac{2}{3},\qquad EY=\int_5^{+\infty}ye^{-(y-5)}\mathrm{d}y=6$$

由独立性，$E(XY)=EX\cdot EY$，故

$$E(3XY)=3EX\cdot EY=3\times\frac{2}{3}\times 6=12$$

1.5 期望的分解求法（示性变量法）【高频考点】

对” 计数” 型随机变量（配对数、次品数、有球盒子数、停车次数），其分布律往往很难求，但可分解为示性变量之和 $X=\sum_i X_i$，其中 X_i 只取 0,1，且 $EX_i=P\{X_i=1\}$，再用性质 3 求和。** 注意：此时各 X_i 并不独立，但求期望不需要独立性。**

例 8（配对问题）将 n 只球（$1\sim n$ 号）随机放入 n 只盒子（$1\sim n$ 号），一只盒子装一只球。球与盒子同号称为一个配对，记 X 为配对个数，求 EX。

解设 $X_i=1$ 表示 i 号球装入 i 号盒子，否则 $X_i=0$（$i=1,2,\ldots,n$），则 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$。由古典概型

$$EX_i=P\{X_i=1\}=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$$

故

$$EX=\sum_{i=1}^{n}EX_i=n\cdot\frac{1}{n}=1$$

类题（方法与结果应记住）：

- **超几何分布的期望**：一批产品中有 M 件正品、N 件次品，任取 n 件，X 为取到的次品件数。令 $X_i=1$ 表示第 i 次取到次品，则 $EX_i=\dfrac{N}{M+N}$，故 $EX=\dfrac{nN}{M+N}$。
- **有球的盒子数**：n 只球等可能投入 M 只盒子（每盒容量不限），X 为有球的盒子数。令 $X_i=1$ 表示第 i 只盒子有球，$P\{X_i=0\}=\left(\dfrac{M-1}{M}\right)^n$，故 $EX=M\left[1-\left(\dfrac{M-1}{M}\right)^n\right]$。
  同类题：100 只铅笔随机分给 80 个孩子，平均有 $80\left[1-\left(\dfrac{79}{80}\right)^{100}\right]$ 个孩子得到铅笔；大巴载 20 人途经 10 站，平均停车 $10\left[1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}\right]$ 次。

2 方差

2.1 方差的定义与计算【高频考点】

定义设 X 是随机变量，若 $E(X-EX)^2$ 存在，则称其为 X 的**方差**，记为 DX 或 $\mathrm{Var}(X)$；称 $\sqrt{DX}$ 为**均方差（标准差）**。

$$DX=E(X-EX)^2$$

方差描述 X 的取值偏离均值的平均偏离程度：方差越大（小），偏离程度越大（小）。

计算公式：

1. 离散型（分布律 $P\{X=x_i\}=p_i$）：$DX=\sum_{i=1}^{+\infty}(x_i-EX)^2p_i$；
2. 连续型（密度 $f(x)$）：$DX=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)^2f(x)\mathrm{d}x$；
3. 常用简化公式（考试首选）：

$$DX=EX^2-(EX)^2$$

等价地，$EX^2=DX+(EX)^2$。

推导：$DX=E(X^2-2X\cdot EX+(EX)^2)=EX^2-2(EX)^2+(EX)^2=EX^2-(EX)^2$。

例 9 设随机变量 X 的概率密度为

x **的范围**	$f(x)$
$-1\le x<0$	$1+x$
$0\le x<1$	$1-x$
其它	0

求 $P\{|X-EX|\le 2DX\}$。

解 $f(x)$ 是偶函数，故

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=0$$

$$EX^2=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6},\qquad DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{6}$$

于是 $2DX=\dfrac{1}{3}$，

$$P\{|X-EX|\le 2DX\}=P\left\{|X|\le\frac{1}{3}\right\}=\int_{-1/3}^{0}(1+x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1/3}(1-x)\mathrm{d}x=\frac{5}{9}$$

2.2 方差的性质【高频考点】

1. 设 C 为常数，则 $D(C)=0$；
2. 设 k 为常数，则 $D(kX)=k^2DX$（**注意是平方**）；
3. 设 X,Y **相互独立**，则 $D(X+Y)=DX+DY$（证明见第 4 节）。常用变形：

$$D(aX+c)=a^2DX,\qquad D(aX+bY+c)=a^2DX+b^2DY,\qquad D(X-Y)=DX+DY$$

推广：$X_1,\dots,X_n$ 相互独立时，$D\left(\sum_{i=1}^{n}k_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}k_i^2DX_i$。

1. $DX=0\Leftrightarrow P\{X=EX\}=1$（即 X 以概率 1 取常数）。

易错提示

- 独立时 $D(X-Y)=DX+DY$，是**加号**不是减号；$D(aX)=a^2DX$，不是 aDX。
- X,Y 不独立时，$D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$（第 4 节），切不可漏掉协方差项。

2.3 标准化随机变量

设 EX、DX 存在且 $DX\neq 0$，令

$$X^*=\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}$$

则 $EX^*=\dfrac{1}{\sqrt{DX}}(EX-EX)=0$，$DX^*=\dfrac{D(X-EX)}{DX}=\dfrac{DX}{DX}=1$。$X^*$ 称为 X 的**标准化随机变量**（期望 0、方差 1）。这一变换在正态分布查表和中心极限定理中反复使用。

3 常用分布的数学期望与方差【必背】

3.1 常用分布期望方差汇总表

分布	分布律 / 概率密度	EX	DX
$(0-1)$ 分布 $B(1,p)$	$P\{X=1\}=p$, $P\{X=0\}=1-p$	p	$p(1-p)$
二项分布 $B(n,p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $\Pi(\lambda)$	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
均匀分布 $U[a,b]$	$f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ $(a\le x\le b)$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
指数分布（参数 $\lambda>0$）	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ $(x>0)$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

补充（课件例题中出现）：几何分布 $P\{X=k\}=pq^{k-1}$ $(k=1,2,\dots,q=1-p)$，$EX=\dfrac{1}{p}$，$DX=\dfrac{q}{p^2}$；超几何分布 $EX=\dfrac{nN}{M+N}$。

3.2 典型推导思路（考推导时会用）

- **$(0-1)$ 分布 **：$EX=p$，$EX^2=p$，$DX=p-p^2=p(1-p)$。
- **二项分布**：X 可分解为 n 个相互独立、同服从 $(0-1)$ 分布的随机变量之和 $X=\sum_{i=1}^n X_i$，由期望、方差的可加性立得 $EX=np$，$DX=np(1-p)$。
- **泊松分布**：$EX=\sum_{k=0}^{+\infty}k\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda$；再算 $EX^2=\lambda^2+\lambda$，故 $DX=\lambda$。
- **均匀分布**：直接积分，$EX=\dfrac{a+b}{2}$，$EX^2=\dfrac{a^2+ab+b^2}{3}$，$DX=\dfrac{(b-a)^2}{12}$。
- **指数分布**：分部积分得 $EX=\dfrac{1}{\lambda}$，$EX^2=\dfrac{2}{\lambda^2}$，$DX=\dfrac{1}{\lambda^2}$。
- **正态分布**：换元 $t=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$ 得 $EX=\mu$；再换元并分部积分得 $DX=\sigma^2$。

正态分布的重要结论：设 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$ $(i=1,2)$ 且相互独立，则线性组合 $Z=k_1X_1+k_2X_2+b\sim N(EZ,DZ)$，即正态变量的线性组合仍为正态分布，只需算出 $EZ=k_1\mu_1+k_2\mu_2+b$ 与 $DZ=k_1^2\sigma_1^2+k_2^2\sigma_2^2$。

** 补充（函数的期望求 $E(e^{tX})$，后续章节要用）**：若 X 服从几何分布 $P\{X=k\}=pq^{k-1}$，则 $E(e^{tX})=\sum_{k=1}^{+\infty}e^{tk}pq^{k-1}=\dfrac{pe^t}{1-qe^t}$；若 $X\sim B(n,p)$，则 $E(e^{tX})=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(e^tp)^k(1-p)^{n-k}=(e^tp+1-p)^n$。

3.3 综合例题

例 10 设 X 服从参数 $\lambda=2$ 的指数分布（$f(x)=2e^{-2x}$，$x>0$），Y 在 $[0,2]$ 上服从均匀分布，且 X,Y 相互独立。求 $D(XY)$。

解由常用分布表：$EX=\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{1}{2}$，$DX=\dfrac{1}{\lambda^2}=\dfrac{1}{4}$；$EY=\dfrac{a+b}{2}=1$，$DY=\dfrac{(b-a)^2}{12}=\dfrac{1}{3}$。

$$D(XY)=E(X^2Y^2)-[E(XY)]^2=EX^2\cdot EY^2-(EX\cdot EY)^2$$

（用了 X,Y 独立 $\Rightarrow X^2,Y^2$ 独立及 $E(XY)=EX\cdot EY$）

$$=\left[DX+(EX)^2\right]\left[DY+(EY)^2\right]-(EX\cdot EY)^2=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

例 11（考研风格选择题）设 $X_1\sim N(0,1)$，$X_2\sim N(3,2^2)$，且 X_1 与 X_2 相互独立，X 的分布函数为 $F(x)=a\Phi(x)+b\Phi\left(\dfrac{x-3}{2}\right)$，其中 $\Phi(x)$ 为 $N(0,1)$ 的分布函数，常数 $a,b>0$，$a+b=1$。则正确结论是（）：

(A) $X=aX_1+bX_2$；(B) $X\sim N(3b,a^2+4b^2)$；(C) $EX=3b$；(D) $EX=\dfrac{3}{2}b$。

解求导得概率密度 $f(x)=a\varphi(x)+b\cdot\dfrac{1}{2}\varphi\left(\dfrac{x-3}{2}\right)$，其中 φ 为 $N(0,1)$ 的密度。于是

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)\mathrm{d}t=a\int_{-\infty}^{+\infty}t\varphi(t)\mathrm{d}t+\frac{b}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}t\varphi\left(\frac{t-3}{2}\right)\mathrm{d}t$$

第一项为 0；第二项换元 $u=\dfrac{t-3}{2}$（$t=2u+3$，$\mathrm{d}t=2\mathrm{d}u$）：

$$EX=\frac{b}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(2u+3)\varphi(u)\cdot 2\mathrm{d}u=b\int_{-\infty}^{+\infty}(2u+3)\varphi(u)\mathrm{d}u=3b$$

故选 **(C)**。注意 X 是**混合分布**而非正态分布，(A)(B) 均错。

4 协方差与相关系数

4.1 协方差的定义与性质【高频考点】

定义称 $E[(X-EX)(Y-EY)]$ 为随机变量 X 与 Y 的**协方差**，记为 $\mathrm{Cov}(X,Y)$：

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]$$

它描述 X,Y 之间的线性关系：$\mathrm{Cov}(X,Y)>0$ 表示正相关（同向变化）；$\mathrm{Cov}(X,Y)<0$ 表示负相关（反向变化）；$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ 表示零相关。绝对值越大，同（反）向程度越强。

常用计算公式（展开即得）：

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY$$

等价地，$E(XY)=\mathrm{Cov}(X,Y)+EX\cdot EY$。

性质：

1. $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$；
2. $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$（$a,b$ 为常数）；
3. $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$；
4. 若 X 与 Y 相互独立，则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=0$；但 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ 时 X 与 Y **未必独立**；

5. **方差与协方差的关系**（推导：$D(X+Y)=E[(X-EX)+(Y-EY)]^2$ 展开）：

$$D(X+Y)=DX+DY+2\mathrm{Cov}(X,Y),\qquad D(X-Y)=DX+DY-2\mathrm{Cov}(X,Y)$$

X 与 Y 独立时 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，即得方差性质 3：$D(X\pm Y)=DX+DY$。

4.2 相关系数【高频考点】

定义当 $DX>0$，$DY>0$ 时，称

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}$$

为 X 与 Y 的**相关系数**（标准协方差），它刻画 X 与 Y 之间**线性关系**的近似程度。若 $\rho_{XY}=0$，称 X 与 Y **不相关**。

性质：

1. $|\rho_{XY}|\le 1$；
2. $|\rho_{XY}|=1\Leftrightarrow$ 存在常数 a,b 使 $P\{Y=aX+b\}=1$（以概率 1 存在线性关系），且 $\rho=1$ 时 $a>0$，$\rho=-1$ 时 $a<0$；
3. $|\rho|$ 越大线性关系越强；$\rho=0$ 表示没有线性关系（不相关）。

柯西–施瓦兹不等式：设 X,Y 为任意随机变量，则 $[E(XY)]^2\le EX^2\cdot EY^2$；等号成立 $\Leftrightarrow$ 存在常数 t_0 使 $P\{Y=t_0X\}=1$。把 X,Y 换成 $X-EX,Y-EY$ 即得 $[\mathrm{Cov}(X,Y)]^2\le DX\cdot DY$，从而 $|\rho_{XY}|\le 1$。

4.3 独立与不相关的关系【高频考点】

定理若 X 与 Y 相互独立，则 X 与 Y 不相关（$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，$\rho_{XY}=0$）。**反之不然**：不相关推不出独立。

特例（重要）：若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$（二维正态），则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2$，$\rho_{XY}=\rho$，且

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2}=\rho$$

此时 $\rho=0$ 既等价于 X 与 Y 不相关，也等价于 X 与 Y 相互独立（第三章结论）。即对二维正态分布，独立与不相关**等价**。

例 12 设 (X,Y) 的联合概率密度为：当 $x^2+y^2\le 1$ 时 $f(x,y)=\dfrac{1}{\pi}$，其它为 0。求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$，并判断 X 与 Y 是否独立。

解（1）由对称性（被积函数关于 x 是奇函数，积分区域关于 y 轴对称）：

$$EX=\iint_{x^2+y^2\le 1}x\cdot\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\qquad E(XY)=\iint_{x^2+y^2\le 1}xy\cdot\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

同理 $EY=0$，故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=0$，即 X 与 Y 不相关。

(2) 边沿密度：当 $|x|\le 1$ 时

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

当 $|x|>1$ 时 $f_X(x)=0$。同理 $f_Y(y)=\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}$ $(|y|\le 1)$。显然 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y **不独立**。

例 13 设 (X,Y) 的联合分布律为：中心点 $P\{X=0,Y=0\}=0$，$P\{X=0,Y=\pm1\}=P\{X=\pm1,Y=0\}=\dfrac{1}{8}$，$P\{X=\pm1,Y=\pm1\}=\dfrac{1}{8}$。验证 X 与 Y 不相关，但不相互独立。

解边沿分布律均为：$P\{X=-1\}=\dfrac{3}{8}$，$P\{X=0\}=\dfrac{2}{8}$，$P\{X=1\}=\dfrac{3}{8}$（Y 相同）。于是

$$EX=-1\times\frac{3}{8}+0\times\frac{2}{8}+1\times\frac{3}{8}=0,\qquad EX^2=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{4},\qquad DX=\frac{3}{4}$$

由对称性 $EY=0$，$DY=\dfrac{3}{4}$。又

$$E(XY)=\sum_i\sum_j x_iy_jP\{X=x_i,Y=y_j\}=0$$

（逐项代入，非零项两两抵消），故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，$\rho_{XY}=0$，即不相关。但

$$P\{X=0,Y=0\}=0\neq P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}=\frac{2}{8}\times\frac{2}{8}=\frac{1}{16}$$

故 X 与 Y 不相互独立。

类题：若 X 的概率密度 $f(x)$ 为偶函数且 $EX^2<+\infty$，则 $xf(x)$、$|x|xf(x)$ 都是奇函数，于是 $EX=0$，$E(|X|X)=0$，从而 $\mathrm{Cov}(|X|,X)=0$，即 $|X|$ 与 X 不相关；但取 $a>0$ 使 $0<P\{|X|<a\}<1$，有 $P\{|X|<a,X<a\}=P\{|X|<a\}\neq P\{|X|<a\}P\{X<a\}$，故 $|X|$ 与 X 不独立。

4.4 二维正态综合例题

例 14 设 $(X,Y)\sim N(0,1^2;1,2^2;\rho)$，且 $Z=X-2Y+1$。

(1) 当 $\rho=0$ 时，求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$ 及 $D(XY)$；

(2) 当 $\rho=-\dfrac{1}{2}$ 时，求 $E[(Y-X)Y]$ 及 $D(X-2Y)$。

解由题设 $EX=0$，$DX=1$，$EY=1$，$DY=4$。

(1) 由 $\rho=0$ 且为二维正态知 X 与 Y **相互独立**。正态变量的线性组合仍为正态：

$$EZ=E(X-2Y+1)=EX-2EY+1=-1,\qquad DZ=D(X-2Y+1)=DX+4DY=17$$

故 $Z\sim N(-1,17)$，概率密度为

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{17}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z+1)^2}{34}},\qquad -\infty<z<+\infty$$

由独立性知 X^2 与 Y^2 也独立，

$$D(XY)=EX^2\cdot EY^2-(EX\cdot EY)^2=\left[DX+(EX)^2\right]\left[DY+(EY)^2\right]-(EX\cdot EY)^2=1\times5-0=5$$

(2) 当 $\rho=-\dfrac{1}{2}$ 时，$\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho\sqrt{DX}\sqrt{DY}=-\dfrac{1}{2}\times1\times2=-1$，

$$E[(Y-X)Y]=EY^2-E(XY)=\left[DY+(EY)^2\right]-[\mathrm{Cov}(X,Y)+EX\cdot EY]=5-(-1+0)=6$$

$$D(X-2Y)=DX+4DY-4\mathrm{Cov}(X,Y)=1+4\times4-4\times(-1)=21$$

5 矩与协方差矩阵【了解】

5.1 矩的定义

矩是一些数字特征的泛称或总称。设 X,Y 为随机变量：

- $E(X^k)$ $(k=1,2,\dots)$ ——X 的 **k 阶原点矩 **；
- $E[(X-EX)^k]$ $(k=1,2,\dots)$ ——X 的 **k 阶中心矩 **；
- $E(X^kY^l)$ ——X 与 Y 的 **$(k+l)$ 阶原点混合矩 **；
- $E[(X-EX)^k(Y-EY)^l]$ ——**$(k+l)$ 阶中心混合矩 **；
- $E|X|^k$ ——k 阶原点绝对矩；$E|X-EX|^k$ ——k 阶中心绝对矩。

显然，EX 是一阶原点矩，$DX=E(X-EX)^2$ 是二阶中心矩，$\mathrm{Cov}(X,Y)$ 是二阶中心混合矩。

例 15 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $E(X-EX)^k$（k 为正整数）。

解换元 $t=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$，

$$E(X-EX)^k=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^k\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{\sigma^k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^ke^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

当 k 为奇数时被积函数为奇函数，$E(X-EX)^k=0$；当 k 为偶数时，逐次分部积分，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}t^ke^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=(k-1)\int_{-\infty}^{+\infty}t^{k-2}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\cdots=(k-1)(k-3)\cdots3\cdot1\cdot\sqrt{2\pi}$$

故 $E(X-EX)^k=\sigma^k(k-1)!!$（$k$ 为偶数）。

5.2 协方差矩阵与 n 维正态分布

定义对 n 维随机向量 $(X_1,X_2,\dots,X_n)$，若 $c_{ij}=\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=E[(X_i-EX_i)(X_j-EX_j)]$ $(i,j=1,2,\dots,n)$ 都存在，则矩阵 $C=(c_{ij})_{n\times n}$ 称为其**协方差矩阵**。由 $c_{ij}=c_{ji}$ 知 C 是**对称矩阵**。

二维正态 $(X_1,X_2)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$ 的协方差矩阵为

σ_1^2	$\rho\sigma_1\sigma_2$
$\rho\sigma_1\sigma_2$	σ_2^2

且 $\det C = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$。记 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$，$\mu = (\mu_1, \mu_2)^T$，则二维正态密度可写成矩阵形式，并推广到 n 维正态 $(X_1, \ldots, X_n)$：

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det C}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T C^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\right\}$$

其中 $C = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{n\times n}$，$\mu = (EX_1, \ldots, EX_n)^T$。该形式在多元统计分析和随机过程中要用到。

6 本章总结

6.1 必背公式汇总

1. 离散型期望：$EX = \sum_k x_k p_k$；连续型期望：$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$（均要求绝对收敛）。
2. 函数的期望：$E[g(X)] = \sum_k g(x_k)p_k$ 或 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$；$E[g(X,Y)] = \sum_i\sum_j g(x_i, y_j)p_{ij}$ 或 $\iint g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。
3. 期望性质：$E(C) = C$；$E(aX+bY+c) = aEX + bEY + c$；独立时 $E(XY) = EX \cdot EY$。
4. 方差定义与计算：$DX = E(X-EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$；$EX^2 = DX + (EX)^2$。
5. 方差性质：$D(C) = 0$；$D(aX+c) = a^2DX$；独立时 $D(X\pm Y) = DX + DY$，$D(aX+bY+c) = a^2DX + b^2DY$。
6. 标准化：$X^* = \dfrac{X-EX}{\sqrt{DX}}$，$EX^* = 0$，$DX^* = 1$。
7. 常用分布表（见 3.1）：$B(1,p)$：p，$p(1-p)$；$B(n,p)$：np，$np(1-p)$；$\Pi(\lambda)$：λ，λ；$U[a,b]$：$\dfrac{a+b}{2}$，$\dfrac{(b-a)^2}{12}$；指数：$\dfrac{1}{\lambda}$，$\dfrac{1}{\lambda^2}$；$N(\mu,\sigma^2)$：μ，σ^2。
8. 协方差：$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-EX)(Y-EY)] = E(XY) - EX \cdot EY$。
9. 协方差性质：对称性；$\mathrm{Cov}(aX, bY) = ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$；$\mathrm{Cov}(X_1+X_2, Y) = \mathrm{Cov}(X_1,Y) + \mathrm{Cov}(X_2,Y)$。
10. 一般方差公式：$D(X\pm Y) = DX + DY \pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$。
11. 相关系数：$\rho_{XY} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$；$|\rho| \le 1$；$|\rho| = 1 \Leftrightarrow P\{Y = aX+b\} = 1$。
12. 独立 $\Rightarrow$ 不相关；二维正态时独立 $\Leftrightarrow$ 不相关（$\rho = 0$），且 $\mathrm{Cov}(X,Y) = \rho\sigma_1\sigma_2$。
13. 柯西–施瓦兹不等式：$[E(XY)]^2 \le EX^2 \cdot EY^2$。
14. 矩：k 阶原点矩 $E(X^k)$，k 阶中心矩 $E(X-EX)^k$；正态 $N(\mu,\sigma^2)$ 的中心矩：奇数阶为 0，偶数阶为 $\sigma^k(k-1)!!$。
15. 独立时：$D(XY) = EX^2EY^2 - (EX\cdot EY)^2 = [DX + (EX)^2][DY + (EY)^2] - (EX\cdot EY)^2$。

6.2 重要求解方法与套路

套路一：定义法求期望与方差

第 1 步：写出分布律或密度；第 2 步：代入定义式求 EX（离散求和、连续积分，分段密度分段积分）；第 3 步：同法求 EX^2；第 4 步：$DX = EX^2 - (EX)^2$。

套路二：随机变量函数的期望

第 1 步：确定是求 $E[g(X)]$ 还是 $E[g(X,Y)]$；第 2 步：** 不求 g 的分布 **，直接用加权求和或积分；第 3 步：二维连续型注意积分区域与密度非零区域的交。

套路三：示性变量分解法（计数型期望）

第 1 步：把计数变量拆成 $X = \sum_i X_i$，$X_i \in \{0,1\}$；第 2 步：用古典概型求 $EX_i = P\{X_i = 1\}$（各 X_i 不必独立）；第 3 步：$EX = \sum_i EX_i$。适用于配对、次品数、有球盒子数、停车次数。

套路四：利用性质与常用分布表综合计算

第 1 步：认出各变量的分布，查表写 EX_i、DX_i；第 2 步：判断独立性；第 3 步：用线性性质算期望，用 $D(aX+bY+c) = a^2DX + b^2DY$（独立时）算方差；第 4 步：乘积方差用第 15 条公式。

套路五：协方差与相关系数计算

第 1 步：算 EX、EY、$E(XY)$；第 2 步：$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - EX \cdot EY$；第 3 步：算 DX、DY，代入 $\rho_{XY} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$。若联合分布关于某变量对称，先用奇偶性简化积分。

套路六：不相关与独立的判定

第 1 步：算 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 判断是否不相关；第 2 步：若要不独立，找一对具体取值使 $P\{X = x_i, Y = y_j\} \neq P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}$（常取概率为 0 的格子）；第 3 步：若为二维正态，直接由 ρ 是否等于 0 下结论。

套路七：正态线性组合

第 1 步：确认各正态变量独立（或二维正态）；第 2 步：断言线性组合服从 $N(EZ, DZ)$；第 3 步：分别算 EZ、DZ（不独立时用 $D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$）。

6.3 重要题型归纳

题型	识别特征	解题套路 / 所用公式
由分布律/密度求 EX、DX	给出分布律表或分段密度	套路一；$DX = EX^2 - (EX)^2$
求 $E[g(X)]$、$E[g(X,Y)]$	出现 X^2、$\sin X$、XY、e^{tX} 等函数	套路二，不求新分布
计数型期望	配对、抽次品、投球入盒、停车次数	套路三：示性变量分解
期望方差性质综合	$E(aX+bY+c)$、$D(aX+bY)$	性质 3、方差性质；注意是否独立
独立乘积的数字特征	求 $E(XY)$、$D(XY)$	$E(XY) = EX \cdot EY$；总结公式 15
协方差、相关系数	求 Cov、ρ 或判断相关方向	套路五
不相关但不独立的判定	联合分布关于原点对称	套路六；二维正态时两者等价
正态线性组合	$Z = aX + bY + c$，求 f_Z 或概率	套路七：$Z \sim N(EZ, DZ)$
混合分布的期望	$F(x) = a\Phi(x) + b\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$	求导得密度，再分项积分换元

6.4 易错点清单

- 期望存在的前提是绝对收敛；柯西分布等厚尾分布的期望不存在。
- $E(X+Y) = EX + EY$ 无条件成立，但 $E(XY) = EX \cdot EY$ 需要独立（或不相关）。
- $D(aX) = a^2 DX$ 是 a 的平方，且常数项不影响方差：$D(X+c) = DX$。
- 独立时 $D(X-Y) = DX + DY$ 仍是加号；不独立时必须补上 $\mp 2\mathrm{Cov}(X,Y)$。
- 公式是 $DX = EX^2 - (EX)^2$，其中 $EX^2 = E(X^2)$，不要把平方位置记错。
- 用示性变量分解求期望时各 X_i 不独立也不要紧；但求方差时不能照搬，需考虑协方差。
- $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ 只说明不相关（无线性关系），推不出独立；只有二维正态时二者等价。
- 判定不独立只需找到一对取值使联合概率不等于边沿概率之积。
- 相关系数 ρ 无量纲且 $|\rho| \le 1$；$|\rho| = 1$ 对应以概率 1 的线性关系。
- 指数分布参数化以课件为准（$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$，$EX = 1/\lambda$），不要与 $EX = \lambda$ 的记号混淆。
- $F(x) = a\Phi(x) + b\Phi(\frac{x-3}{2})$ 是混合分布，其密度要逐项求导（第二项出现因子 $1/2$），不能当成正态分布。