# 第六章　大数定律和中心极限定理

## 图文并茂详细学习笔记

依据课程 PPT 课件整理

2026 年 11 月 16 日

**摘　要**

本章是概率论两大极限定理的集中章节：契比雪夫不等式与马尔可夫不等式是估计尾概率、证明大数定律的工具；契比雪夫、辛钦、贝努里三大（弱）大数定律从理论上说明了”频率稳定于概率、样本均值稳定于总体均值”；独立同分布中心极限定理与棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理则给出了大量独立随机变量之和的近似正态分布。考试高频题型：用契比雪夫不等式估计概率、判断依概率收敛、用中心极限定理近似计算二项分布或与和式有关的概率。

# 目录

**本章知识框架** **2**

**1　概率不等式** **2**

1.1　马尔可夫不等式 . . . . . 2

1.2　契比雪夫不等式（集中不等式）【高频考点】 . . . . . 2

**2　大数定律** **3**

2.1　随机变量序列与依概率收敛【重点】 . . . . . 3

2.2　契比雪夫弱大数定律【重点】 . . . . . 4

2.3　辛钦弱大数定律【重点】 . . . . . 5

2.4　贝努里弱大数定律 . . . . . 5

**3　中心极限定理** **5**

3.1　独立同分布中心极限定理（林德伯格—列维）【高频考点】 . . . . . 5

3.2　棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理【高频考点】 . . . . . 6

3.3　中心极限定理的应用 . . . . . 6

**4　本章总结** **8**

4.1　必背公式汇总 . . . . . 8

4.2　重要求解方法与套路 . . . . . 9

4.3　重要题型归纳 . . . . . 9

4.4　易错点清单 . . . . . 9

# 本章知识框架

概率不等式（马尔可夫不等式 → 契比雪夫不等式：估计尾概率的工具）
→ 大数定律：依概率收敛的定义 → 契比雪夫大数定律 → 辛钦大数定律（独立同分布）
→ 贝努里大数定律（频率收敛于概率）
→ 中心极限定理：独立同分布中心极限定理（林德伯格—列维）→ 棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理（二项分布的正态近似）→ 用标准正态分布近似计算和的概率

## 1 概率不等式

不等式是研究概率问题的有力工具，也是证明大数定律的理论基础。

### 1.1 马尔可夫不等式

设随机变量 $X$ 存在 $E|X|^k$，$k>0$，则对任意 $\varepsilon>0$，成立：

$$P\{|X|\geq\varepsilon\}\leq\frac{E|X|^k}{\varepsilon^k},\quad k>0$$

把 $X$ 换成 $X-EX$，得到常用变形：

$$P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{E|X-EX|^k}{\varepsilon^k},\quad k>0$$

**要点**：马尔可夫不等式用 $k$ 阶绝对矩控制”取值偏大”的概率上界，$k$ 取不同值可得到不同的矩不等式。

### 1.2 契比雪夫不等式（集中不等式）【高频考点】

设随机变量 $X$ 存在 $EX$ 和 $DX$，则对任意 $\varepsilon>0$，成立：

$$P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

或写成对立事件形式（两个公式地位相同，都要背）：

$$P\{|X-EX|<\varepsilon\}\geq1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

**证明思路（离散型）**：设 $X$ 的分布律为 $P\{X=x_i\}=p_i$，$i=1,2,\ldots$，则

$$P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}=\sum_{|x_i-EX|\geq\varepsilon}P\{X=x_i\}$$

$$\leq\sum_{|x_i-EX|\geq\varepsilon}\frac{(x_i-EX)^2}{\varepsilon^2}P\{X=x_i\}\leq\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{(x_i-EX)^2}{\varepsilon^2}P\{X=x_i\}=\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

**意义**：

- 固定 $\varepsilon$ 时，$DX$ 越小，$P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}$ 越小，理论上证实了**方差度量随机变量取值偏离均值的偏离程度**；
- 只需知道 $EX$、$DX$，不必知道分布，即可用方差估计”尾概率”的上界。

**易错提示**

- 契比雪夫不等式估计的是 $|X-EX|$（与均值之差的绝对值），不是 $|X|$；
- 用 $P\{|X-EX|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$ 时右边可能为负，此时只能说明估计失效，不能得出概率为负；
- 契比雪夫不等式给出的是**上界**，一般比较粗糙，不要与精确概率混淆。

**例 1** 已知随机变量 $X>0$，$Y>0$，且常数 $a>0$，假设下面各选项中的矩都存在，则下列不等式不成立的是（　）

A. $EX^4\leq(EX)^4$　　B. $E\sqrt{X}\leq\sqrt{EX}$　　C. $P\{|X-Y|>a\}\leq\frac{E|X-Y|}{a}$　　D. $P\{|X-Y|>a\}\leq\frac{E(X-Y)^4}{a^4}$

**解**逐个分析各选项。

- 对 C：在马尔可夫不等式中取随机变量 $X-Y$、$k=1$，即得 $P\{|X-Y|>a\}\leq\frac{E|X-Y|}{a}$，成立；
- 对 D：取 $k=4$，得 $P\{|X-Y|>a\}\leq\frac{E|X-Y|^4}{a^4}=\frac{E(X-Y)^4}{a^4}$，成立；
- 对 B：由柯西—施瓦茨不等式 $[E(XY)]^2\leq EX^2\cdot EY^2$，取 $X$ 为 $\sqrt{X}$、$Y=1$，得 $[E(\sqrt{X}\cdot 1)]^2\leq EX\cdot 1$，即 $E\sqrt{X}\leq\sqrt{EX}$，成立；
- 对 A：由 $EX^4=E[(X^2)^2]=DX^2+(EX^2)^2$，且 $E(X^{1/2}\cdot 1)^2$ 型的估计给出 $EX^2\geq(EX)^2$，故

$$EX^4=DX^2+(EX^2)^2\geq(EX^2)^2\geq(EX)^4$$

即正确方向应为 $EX^4\geq(EX)^4$，故 A 不成立。

**答案：A**。

# 2 大数定律

## 2.1 随机变量序列与依概率收敛【重点】

**定义 1** 依次列出的可数无穷多个随机变量 $X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$，简记为 $\{X_n\}$，称为随机（变量）序列。

**定义 2** 对于随机（变量）序列 $\{X_n\}$ 和随机变量 $X$（或常数 $a$），若对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|X_n-X|<\varepsilon\}=1$$

或等价地

$$\lim_{n\to\infty}P\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}=0$$

则称随机（变量）序列 $\{X_n\}$ **依概率收敛**于 $X$（或常数 $a$），简记为 $X_n \xrightarrow{P} X$（$n \to \infty$），或 $X_n \xrightarrow{P} a$（$n \to \infty$）。

**注意**

依概率收敛是**概率意义下**的收敛：$n$ 充分大时，$X_n$ 与 $X$ 偏差超过任意给定 $\varepsilon$ 的概率趋于 0，但并不排除个别试验中偏差仍然很大。它与微积分中的极限（对每个结果都成立）不同，考试常考定义本身。

## 2.2 契比雪夫弱大数定律【重点】

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 是**相互独立**的随机变量，每一个 $X_i$ 都存在 $EX_i$ 和有限的 $DX_i$，且方差有公共上界，即

$$D(X_i) \le C, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

则对任意 $\varepsilon > 0$，成立：

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

**证明**：令 $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，有

$$EY_n = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i$$

由 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 相互独立，得

$$DY_n = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i \le \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} C = \frac{C}{n}$$

根据契比雪夫不等式 $P\{|Y_n - EY_n| < \varepsilon\} \ge 1 - \frac{DY_n}{\varepsilon^2}$，得

$$1 \ge P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i\right| < \varepsilon\right\} \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$$

令 $n \to \infty$，即得所证极限等于 1。

**推论**若随机变量序列独立，且有相同的数学期望和方差 $EX_i = \mu, DX_i = \sigma^2\,(i = 1, 2, \ldots)$，则对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\overline{X} - \mu| < \varepsilon\} = 1$$

其中 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$。

即 $\overline{X} \xrightarrow{P} \mu$。

### 2.3 辛钦弱大数定律【重点】

若随机变量序列**独立同分布**，存在相同的数学期望 $EX_i=\mu$ $(i=1,2,\ldots)$，则对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\overline{X}-\mu|<\varepsilon\}=1$$

其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$。

**意义**：此结论是 ** 样本均值作为总体均值 $\mu$ 的点估计的理论依据 **（第八章参数估计的基础）。注意辛钦大数定律不要求方差存在，只要求期望存在。

### 2.4 贝努里弱大数定律

设 $n_A$ 是 $n$ 次独立重复试验中事件 $A$ 发生的次数，$p$ 是在每次试验中事件 $A$ 发生的概率，则对任意 $\varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1 \qquad (*)$$

**证明**：引入随机变量 $X_i$：第 $i$ 次试验中 $A$ 发生时 $X_i=1$，$A$ 不发生时 $X_i=0$。则 $n$ 次试验中事件 $A$ 发生的次数

$$n_A=X_1+X_2+\cdots+X_n$$

其中 $X_1,\ldots,X_n$ 独立同分布，$EX_i=p$。由契比雪夫大数定律（或辛钦大数定律），

$$1=\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i\right|<\varepsilon\right\}=\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}$$

**意义**：事件 $A$ 发生的频率 $\frac{n_A}{n}$ 依概率收敛于事件 $A$ 发生的概率 $p$，即 $\frac{n_A}{n}\xrightarrow{P}p$。这是**用频率估计概率的理论依据**。

**考场提醒**

三个大数定律的条件对比是常考选择题：契比雪夫大数定律要求独立 + 方差存在且有公共上界；辛钦大数定律要求独立同分布 + 期望存在（不要求方差）；贝努里大数定律是辛钦大数定律在两点分布下的特例。

## 3 中心极限定理

**客观背景**：如果一个量是由大量相互独立的随机因素所构成，而每一个随机因素在总影响中所起的作用较小，那么这个量通常都服从或近似服从正态分布。独立同分布的随机变量序列本身不一定服从正态分布，但**多个独立随机变量之和的极限分布是正态分布**——”量变引起质变”。

### 3.1 独立同分布中心极限定理（林德伯格—列维）【高频考点】

设随机变量 $X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$ 独立同分布，且存在有限的 $EX_i=\mu$，$DX_i=\sigma^2\neq 0$ $(i=1,2,\ldots)$，记

$$Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i,\qquad Y_n^*=\frac{Y_n-EY_n}{\sqrt{DY_n}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-nEX_i}{\sqrt{nDX_i}}$$

其中 $Y_n^*$ 为 $Y_n$ 的标准化随机变量，则

$$\lim_{n\to\infty}F_{Y_n^*}(x)=\lim_{n\to\infty}P\{Y_n^*\le x\}=\Phi(x)$$

即 $Y_n^*$ 依分布收敛于标准正态分布。** 当 $n$ 充分大时 **:

- $Y_n^*$ 近似服从 $N(0,1)$;
- $Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 近似服从 $N(n\mu,n\sigma^2)$。

**例 2** 设 $X_1,X_2,\dots,X_n,\dots$ 是相互独立的随机变量序列，且服从参数为 $\lambda$ 的指数分布，求 $\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\le x\right\}$。

**解**指数分布下 $EX_i=\frac{1}{\lambda}$，$DX_i=\frac{1}{\lambda^2}$，故 $nEX_i=\frac{n}{\lambda}$，$\sqrt{nDX_i}=\frac{\sqrt{n}}{\lambda}$。由独立同分布中心极限定理，

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\le x\right\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\cdot\frac{1}{\lambda}}{\sqrt{n\cdot\frac{1}{\lambda^2}}}\le x\right\}=\Phi(x)$$

特别地，当 $\lambda=1$（服从参数值为 1 的指数分布）时，取 $x=0$:

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i\le n\right\}=\Phi(0)=\frac{1}{2}$$

## 3.2 棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理【高频考点】

设 $Y_n$ 是 $n$ 次独立重复试验中事件 $A$ 发生的次数，$p$ 是在每次试验中事件 $A$ 发生的概率，则

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{Y_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\right\}=\Phi(x)$$

当 $n$ 充分大时：$Y_n^*=\frac{Y_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ 近似服从 $N(0,1)$，$Y_n$ 近似服从 $N(np,np(1-p))$。

对任意区间 $[a,b]$，成立:

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{a<\frac{Y_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le b\right\}=\Phi(b)-\Phi(a)$$

**直观理解**：随机变量 $X\sim B(n,p)$，固定 $p=0.1$，当 $n=10,20,50,100$ 时分别作出概率直方图可知，随着 $n$ 的增大，正态分布逐渐近似替代二项分布。

## 3.3 中心极限定理的应用

**例 3** 设有一大批种子，其中良种占 $\frac{1}{6}$。试估计在任选的 6000 粒种子中，良种所占比例与 $\frac{1}{6}$ 比较误差小于 1% 的概率。

**解**设 $X$ 表示 6000 粒种子中的良种数，则 $X\sim B(6000,\frac{1}{6})$，要求

$$P\left\{\left|\frac{X}{6000}-\frac{1}{6}\right|<0.01\right\}=?$$

**解 1（用棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理）**注意 $\left|\frac{X}{6000}-\frac{1}{6}\right|<0.01$ 等价于 $940<X<1060$，而 $np=1000$，$\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{\frac{5000}{6}}$，故

$$P\left\{\left|\frac{X}{6000}-\frac{1}{6}\right|<0.01\right\}=P\{940<X<1060\}$$

$$=P\left\{\frac{940-np}{\sqrt{np(1-p)}}<\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}<\frac{1060-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\}$$

$$\approx\Phi\left(\frac{1060-1000}{\sqrt{5000/6}}\right)-\Phi\left(\frac{940-1000}{\sqrt{5000/6}}\right)=\Phi\left(\frac{60}{\sqrt{5000/6}}\right)-\Phi\left(\frac{-60}{\sqrt{5000/6}}\right)$$

$$=2\Phi\left(\frac{60}{\sqrt{5000/6}}\right)-1\approx0.9624$$

**解 2（用二项分布精确计算）**

$$P\left\{\left|\frac{X}{6000}-\frac{1}{6}\right|<0.01\right\}=P\{940<X<1060\}\approx0.9590$$

**解 3（用泊松分布近似计算）**取 $\lambda=6000\times\frac{1}{6}=1000$，

$$P\{940<X<1060\}\approx\sum_{k=941}^{1059}\frac{1000^k e^{-1000}}{k!}=0.9379$$

**比较三种结果**：二项分布（精确）0.9590，中心极限定理 0.9624，泊松分布 0.9379。可见中心极限定理的近似效果相当好，而此处 $p$ 不够小，泊松近似误差较大。

**例 4** 设有 30 个电子器件 $D_1,D_2,\ldots,D_{30}$，使用情况如下：$D_1$ 损坏，$D_2$ 接着使用；$D_2$ 损坏，$D_3$ 接着使用等等。设器件 $D_i$ 的使用寿命服从参数 $\lambda=0.1$（单位：$\mathrm{h}^{-1}$）的指数分布。令 $T$ 为 30 个器件使用的总时数，问 $T$ 超过 350 h 的概率?

**解**设 $X_i$ 为器件 $D_i$ 的使用寿命，$X_i$ 服从参数 $\lambda=0.1$ 的指数分布，$X_1,X_2,\ldots,X_{30}$ 相互独立，

$$T=X_1+X_2+\cdots+X_{30},\qquad \mu=EX_i=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0.1}=10,\qquad \sigma^2=DX_i=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{0.1^2}=100$$

由中心极限定理得

$$P\{T>350\}=1-P\{T\le350\}=1-P\left\{\frac{T-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\le\frac{350-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right\}$$

$$\approx1-\Phi\left(\frac{350-300}{\sqrt{30}\times10}\right)=1-\Phi\left(\frac{5}{\sqrt{30}}\right)=1-\Phi(0.91)$$

$$= 1 - 0.8168 = 0.1814$$

**例 5** 某单位设置一电话总机，共有 200 架电话分机。设每个电话分机有 5% 的时间要使用外线通话，假定每个电话分机是否使用外线通话是相互独立的，问总机需要安装多少条外线才能以 90% 的概率保证每个分机都能即时使用。

**解**依题意设 $X$ 为同时使用的电话分机个数，则 $X \sim B(n,p)$，$n = 200$，$p = 0.05$。具体地，令 $X_i = 1$（第 $i$ 个分机在使用）或 0（第 $i$ 个分机不使用），$i = 1, 2, \ldots, 200$，则

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{200}$$

设安装了 $N$ 条外线，$\{X \le N\}$ 表示”保证每个分机都能即时使用”，要求 $P\{X \le N\} = 0.9$。由棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理，

$$0.9 = P\{X \le N\} = P\left\{\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{N - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{N - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{N - 200 \times 0.05}{\sqrt{200 \times 0.05 \times 0.95}}\right) = \Phi\left(\frac{N - 10}{3.08}\right)$$

查标准正态分布表，$\frac{N-10}{3.08} = z_{0.9} = 1.28$，解得

$$N = 1.28 \times 3.08 + 10 = 13.94$$

取 $N = 14$，即需要安装 14 条外线。

**易错提示**

- 用中心极限定理前必须先求对 $EY_n = n\mu$ 和 $DY_n = n\sigma^2$，标准化时分母是 $\sqrt{n}\sigma$，不要漏掉根号；
- 区间概率要标准化两端：$P\{a < Y_n \le b\} \approx \Phi\left(\frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)$；
- 求”至少安装多少”类问题时，解出小数后应向上取整（如 13.94 取 14）。

# 4 本章总结

## 4.1 必背公式汇总

1. 马尔可夫不等式：$P\{|X| \ge \varepsilon\} \le \frac{E|X|^k}{\varepsilon^k}$（$k > 0$）；
2. 契比雪夫不等式：$P\{|X - EX| \ge \varepsilon\} \le \frac{DX}{\varepsilon^2}$，等价地 $P\{|X - EX| < \varepsilon\} \ge 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$；
3. 依概率收敛：$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1$，记作 $X_n \xrightarrow{P} X$；
4. 契比雪夫大数定律（独立、方差有公共上界 $DX_i \le C$）：平均值依概率收敛于期望的平均值，即 $\overline{X} \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i$；
5. 辛钦大数定律（独立同分布、$EX_i = \mu$）：$\overline{X} \xrightarrow{P} \mu$；
6. 贝努里大数定律：$\frac{n_A}{n} \xrightarrow{P} p$；

7. 独立同分布中心极限定理：$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\right\} = \Phi(x)$，即 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 近似服从 $N(n\mu, n\sigma^2)$；
8. 棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理：$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \Phi(x)$，即 $Y_n \sim B(n,p)$ 近似服从 $N(np, np(1-p))$。

## 4.2 重要求解方法与套路

**用契比雪夫不等式估计概率**：第 1 步，求出 $EX$、$DX$；第 2 步，把所求概率变形为 $P\{|X-EX| \ge \varepsilon\}$ 或 $P\{|X-EX| < \varepsilon\}$ 的标准形式，定出 $\varepsilon$；第 3 步，代入 $\frac{DX}{\varepsilon^2}$ 得上界（或 $1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$ 得下界）。

**证明依概率收敛 / 大数定律**：第 1 步，令 $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，算 $EY_n$、$DY_n$；第 2 步，用契比雪夫不等式夹逼 $1 \ge P\{|Y_n - EY_n| < \varepsilon\} \ge 1 - \frac{DY_n}{\varepsilon^2}$；第 3 步，验证 $DY_n \to 0$，令 $n \to \infty$ 得极限 1。

**用中心极限定理近似求概率**：第 1 步，识别和式 $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$（或二项变量 $Y_n \sim B(n,p)$），算 $n\mu$、$n\sigma^2$（或 $np$、$np(1-p)$）；第 2 步，把所求事件标准化：减去均值、除以标准差 $\sqrt{n}\sigma$；第 3 步，用 $\Phi$ 表示，查标准正态分布表得数值。

**反求容量 / 条数**：第 1 步，同上将概率标准化并令其等于给定置信水平；第 2 步，查表得分位数（如 $z_{0.9} = 1.28$）；第 3 步，解方程求 $n$ 或 $N$，非整数时向保证条件成立的方向取整。

## 4.3 重要题型归纳

| 题型 | 识别特征 | 解题套路/所用公式 |
|---|---|---|
| 契比雪夫不等式估计概率 | 只知 $EX$、$DX$，求偏差概率的上/下界 | 化为 $P\{\|X-EX\| \ge \varepsilon\} \le \frac{DX}{\varepsilon^2}$ 或其对立形式 |
| 矩不等式判断 | 选项含 $EX^k$、$E\sqrt{X}$、尾部概率比较 | 马尔可夫不等式 + $[E(XY)]^2 \le EX^2EY^2$ + $EX^2 \ge (EX)^2$ |
| 依概率收敛判定 | 问 $\overline{X}$ 或 $\frac{n_A}{n}$ 收敛于何值 | 验证大数定律条件，结论为收敛于期望 $\mu$ 或概率 $p$ |
| 大数定律条件辨析 | 比较契比雪夫/辛钦/贝努里大数定律 | 契比雪夫：独立 + 方差有界；辛钦：同分布 + 期望存在；贝努里：频率收敛于概率 |
| 二项分布近似计算 | $X \sim B(n,p)$，$n$ 大，求区间概率 | $P\{a < X \le b\} \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$ |
| 一般和式近似计算 | $n$ 个独立同分布变量之和的概率 | $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 近似服从 $N(n\mu, n\sigma^2)$，标准化查表 |
| 反求样本量/配置数 | ”以多少概率保证……至少多少” | 标准化后令 $\Phi(\cdot)$ 等于给定概率，查表解方程再取整 |

## 4.4 易错点清单

- 契比雪夫不等式两边形式记混：$\ge \varepsilon$ 对应上界 $\frac{DX}{\varepsilon^2}$，$< \varepsilon$ 对应下界 $1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$；
- 依概率收敛要求极限概率为 1，不要写成”对充分大的 $n$ 必有 $|X_n - X| < \varepsilon$”；
- 辛钦大数定律不要求方差存在，若题目只说同分布且期望存在，不能用契比雪夫大数定律；

- 标准化时分母是 $\sqrt{n}\sigma$（或 $\sqrt{np(1-p)}$），不是 $n\sigma^2$，也不是 $\sqrt{n\sigma^2}$ 忘开方；
- $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$，对称区间概率 $P\{|Y_n^*|<a\}\approx 2\Phi(a)-1$，不要写成 $\Phi(2a)$；
- 查表方向别搞反：$P\{X\le N\}=0.9$ 对应 $\frac{N-np}{\sqrt{np(1-p)}}=z_{0.9}=1.28$（正号）；
- 反求 $N$、$n$ 时结果非整数必须合理取整，保证概率条件成立（一般向上取整）；
- 大数定律与中心极限定理别混淆：前者说 $\overline{X}\xrightarrow{P}\mu$（收敛到常数），后者说标准化和的**分布**趋于 $N(0,1)$。